Geschenk des Verf. an die

Akademie der Wissenschaften

<36610801660010

<36610801660010

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 382d

m

# Elementar-Zahlenlehre

zum Gebrauch

für Schulen und Selbstlernende

auch als Leitfaden bey akademischen Vorlesungen.

Nebst einem Anhang, enthaltend

Grundlinien der allgemeinen Größenlehre.

BIBLIOTHECA
MONACENSIS

Von

Martin Ohm,

Doctor der Philosophie, Privatdocent der Mathematik an der königl. Universität zu Erlangen, der allgemeinen kameralistisch-öconomischen Societät daselbst corresp. Mitglied.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erlangen, 1816
bey Palm und Enke.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorrede.

Je mehr vorliegendes Werk von den gewöhnlichen Lehrbüchern der Arithmetik, an Form und Inhalt, abweicht; desto mehr halte ich es für nöthig, hier über die Entstehungsart, den Zwek und die Einrichtung desselben einige Worte vorauszusenden.

Als Schüler schon in Lehrverhältnisse versetzt und seit fünf Jahren als Privatdocent an hies. k. Universität, hatte ich oft Gelegenheit die großen Schwierigkeiten und Hindernisse zu bemerken, welche sich einem jeden, bey dem Erlernen der Mathematik und insbesondere der sogenannten analytisch-mathematischen Wissenschaften, mehr oder weniger, entgegenstellen. Wie viele Zeit und Mühe kostet es nicht bis man sich durch die vielen und weitläufigen Lehren und Lehrsätze der Arithmetik durcharbeitet? Und, wenn dies geschehen, was hat man damit gewonnen? Muß man dann nicht erst, um doch ein, wenn gleich schwaches, Hilfsmittel zum Fortschreiten zu haben, sich mit praktischen, höchst unvollkommenen, wenig begründeten, unter dem Namen der Buchstaben-

rechnung aufgestellten Regeln so lange Zeit hindurch befassen, bis diese endlich, wenigstens größtentheils, mühvoll und geistlos, dem Gedächtniß eingeprägt sind, um sie in weit kürzerer Zeit — wieder vergessen zu können? Wie oft findet man daher nicht, daß ein, wenn auch durch mehrjährige Uebung schon gewandter, Schüler doch noch in vielen seiner Verrichtungen so schwankend und ungewiß ist? Ja wie häufig nimmt nicht derselbe Schüler, aus Mangel an Sätzen, die ihm die Identität der Ausdrüke beurkundeten, Ziffern zu Hilfe um sich an diesen von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit seiner Verrichtungen zu überzeugen? Wie sehr wird nicht der Schüler durch diesen Unterricht, dem es an Einheit und Wissenschaftlichkeit gebricht, abgeschrekt, wie leicht für den wahren Geist der Wissenschaft unempfänglich gemacht? Welch großer Theil des Zweks, weswegen man dem Jüngling das Studium der Mathematik empfiehlt, nehmlich durch dasselbe wissenschaftliche Bildung zu erlangen, geht nicht hierdurch verloren? Nimmt man nun noch hinzu, daß selbst so wenige Lehrer zu dem richtigen Begriff der Wissenschaft gelangt sind*), so darf man

*) So z. B. glauben Viele, Regeln der Buchstabenrechnung begründet zu haben, wenn sie zeigen, daß dieselben Regeln

man sich nicht wundern, daß so Viele vor dieser so erhabenen, und für jeden, der sie wahr und innig erfaßt hat, so anziehenden Wissenschaft zurückschrecken, und nur so höchst Wenige in ihren Geist eindringen, und dadurch des Genusses sich erfreuen, den das Studium derselben gewährt.

Betrachtete ich aber auf der andern Seite die Wissenschaft als solche, so fand ich ohne Mühe, daß troz der von ihr gerühmten Bestimmtheit, Klarheit und Unumstößlichkeit ihrer Sätze, doch noch vieles Unbestimmte, Dunkle und zu Bestreitende in ihr liege. Es war z. B. nicht schwer zu bemerken, daß man nicht die Grenzlinie kenne, zwischen der Elementar-Arithmetik und Algebra, daß man das Verhältniß in welchem die Differenzial- und Integral-Rechnung zu den übrigen Theilen der Mathematik stehe eigentlich nicht anzugeben wisse, daß überhaupt die Einheit in der Anordnung der Theile zum ganzen Gebäude der Wissenschaft vermißt werde. Eben so wenig schwer war es einzusehen, daß, ohnerachtet der Bemühungen so vieler trefflicher Mathematiker, doch

Regeln bey den Operazionen mit Zahlen (d. h. Ziffern) statt finden; ohne zu bedenken, daß die Regeln der sogenannten Rechenkunst doch selbst erst begründet seyn müssen, und daß dieß nur durch jene allgemeinen Sätze der Arithmetik geschehen könne.

doch noch viele Lehren dieser Wissenschaft (ich spreche hier bloß von dem analytischen Theile derselben) z. B. die der entgegengesetzten, der imaginären Größen, der Logarithmen rc. rc. in dem denkenden Geist den Wunsch zurüklassen, sie einfacher und besser begründet zu sehen.

Nicht in der eiteln Meinung alles was bisher bey den thätigen Bemühungen so vieler großer Männer noch Wunsch blieb, durch meine schwachen Kräfte allein verwirklicht sehen zu wollen, sondern in der Ueberzeugung, daß schon derjenige seine Mühe nicht vergebens verwendet hat, dem es gelingt durch seine Ideen einem andern, auserwähltern Geiste Anlaß zum fernern Ausbau der Wissenschaft zu geben; in der Ueberzeugung, daß wir nur durch die Gesammtheit des Strebens und Forschens nach Wahrheit, ihr näher kommen und dadurch die allmähliche Veredlung der Menschheit bezwecken können; daß es daher Pflicht eines jeden sey, der die Kraft und den Beruf dazu in sich fühlt, sein Scherflein, so wenig oder vielbedeutend es auch seyn mag, zur Beförderung des Ganzen beyzutragen, in dieser Ueberzeugung versuchte ich es jene angeführten Mängel, wo möglich, zu vermindern; und als meine Bemühungen mit einem durch die Erfahrung bestättigten guten Erfolg belohnt wurden,

be-

beschloß ich, die gesammte Analysis nach meinen Ansichten auszuarbeiten und durch den Druck bekannt zu machen.

Zu sehr durch Umstände beschränkt ist es mir nicht möglich hier, wo ich mit der Elementar-Zahlenlehre den Anfang mache, meine Ansicht völlig zu entwickeln, die einzelnen Theile der Mathematik aus dem Begriffe ihres Gegenstandes abzuleiten, und den großen und wichtigen Einfluß zu zeigen, den diese Ansicht auf den Vortrag, nicht nur aller Theile der reinen, sondern auch der angewandten Mathematik hat; und ich begnüge mich daher hier einstweilen bloß das nothwendigste davon mitzutheilen.

Als ersten und allgemeinsten Theil der Mathematik hat man die Wissenschaft der Zahlen (Zahlenlehre). Diese wird angewandt zur Vergleichung der Dinge im allgemeinen, und giebt dann die angewandte Zahlenlehre. Daß beyde, die Wissenschaft und die Anwendung derselben, bey dem gewöhnlichen Vortrag der Arithmetik und Algebra, beständig mit einander vermengt, ja verwechselt werden, ist die Hauptursache der meisten der oben gerügten Mängel.

Von einer Zahl bekommen wir einen Begriff indem wir uns des wiederholten Setzens irgend eines Dinges, bewußt werden. Eigentlich

er-

erhalten wir aber durch dieses wiederholte Setzen eine Zahlenreihe; und die Zahlen haben keine andern Merkmale als die verschiedenen Stellen die sie in der Zahlenreihe einnehmen. Aber der Abstand dieser verschiedenen Stellen von einander wird selbst wieder bestimmt durch die Zahl; und die Zahlenlehre kann also nur die Betrachtung der verschiedenen Arten enthalten, wie aus zwey oder mehr gegebenen Zahlen eine neue Zahl erzeugt wird.

Da die Verbindung mehrerer Dinge nur successive geschehen, also immer auf die Verbindung zweyer zurückgebracht werden kann, so hat man auch in der Zahlenlehre bloß auf die Verbindung zweyer Zahlen zu einer dritten Rücksicht zu nehmen; und man erhält dann sogleich folgende einfache Arten der Verbindung (Operazionen):

1) Die Addizion; so nennt man die Art zwey Zahlen zu einer dritten zu verbinden, wenn die dritte erzeugte, durch so vielmal wiederholtes Setzen der Einheit entsteht, als zur Erzeugung der beyden gegebenen Zahlen erfordert wird. Sie ist die erste und ursprüngliche, aus dem Begriff der Zahl unmittelbar hervorgehende, Verbindungsart

zweyer

zweyer Zahlen zu einer dritten; und auf sie müssen alle folgende zurückgeführt werden.

2) Die Multiplikazion; wenn nehmlich die eine Zahl so viel mal zu sich addirt wird als die andere Zahl anzeigt.

3) Die Potenzirung; so heißt die Art der Verbindung, wo die eine Zahl so viel mal mit sich multiplizirt wird, als die andere anzeigt.

Gienge man auf diesem Wege weiter, so würde man eine unendliche Menge ähnlicher Verbindungsarten (Operazionen) erhalten, durch welche zwey Zahlen zu einer dritten verbunden seyn können. Die nächste nehmlich wäre die, wo die eine Zahl so vielmal mit sich potenzirt wird, als die andere anzeigt; u. s. w. Bey dem jetzigen Zustand der Wissenschaft hat man bloß die Addizion, Multiplikazion und Potenzirung berücksichtigt und die Untersuchungen auf gedachte fernere Operazionen nicht ausgedehnt, weil man solches hinsichtlich der Anwendung der Zahlen zur Vergleichung der Dinge nicht nöthig fand.

Aber in jedem der drey Fälle, des Addirens, des Multiplizirens und des Potenzirens kann man von der erzeugten dritten Zahl zu den beyden erzeugenden zurückgehen. Jede der erzeugenden Zahlen hängt nehmlich ab, von der erzeugten dritten und der andern erzeugenden.

Man

Man kann daher sagen, die dritte und erste Zahl seyen auf eine gewisse Art mit einander verbunden um die zweyte zu geben, und eben so seyen die dritte und zweyte auf eine Art zur ersten verbunden. Jede der erwähnten Operazionen, giebt also deren noch zwey neue, die man indirekte Operazionen nennen kann, weil sie nur den Rückweg der andern (direkten) andeuten. Die zwey aus der Addizion hervorgehenden indirekten Operazionen unterscheiden sich aber nicht von einander; weil in der Addizion die beyden erzeugenden Zahlen gleichmäßig zur Erzeugung der dritten beytragen, jede also von der erzeugten und der andern erzeugenden auf dieselbe Art abhängt; beyde Operazionen vereinigen sich daher zu einer einzigen die man die Subtrakzion nennt. Aus demselben Grunde fallen auch die beyden aus der Multiplikazion hervorgehenden indirekten Verbindungsarten in eine zusammen, welche die Division heißt. Endlich heißen die aus der Potenzirung hervorgehenden beyden indirekten Operazionen, die Radikazion und die Logarithmazion. Diese beyden sind wesentlich von einander verschieden, weil beym Potenziren die beyden erzeugenden Zahlen nicht mit einander verwechselt werden können, sondern beyde auf verschiedene Art zur Erzeugung der dritten

ten beytragen, jede also auch auf verschiedene Art von der dritten erzeugten und der andern erzeugenden Zahl abhängen muß.

Theilt man daher die Zahlenlehre (die nichts anders ist, als ein Erzeugen einer Zahl aus einer Menge gegebener Zahlen und dann ein Zurückgehen von der erzeugten Zahl zu den erzeugenden) in die Elementar- und in die höhere Zahlenlehre, und zählt zur ersten alle diejenigen Sätze, die der letztern in ihren zusammengesetztern Untersuchungen zur Grundlage dienen, so hat die Elementarzahlenlehre alle Fälle aufzuzählen, wie zwey Zahlen, die entweder keine Merkmale haben oder eine von den durch die 7 Operazionen aus zwey Zahlen erzeugte, nehmlich: Summe, Differenz, Produkt, Quozient, Potenz, Wurzel oder Logarithme sind, mit einander durch die Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion, Division, Potenzirung, Radikazion und Logarithmazion verbunden werden; und so macht sie dann ein vollkommenes, mit bestimmter Grenzlinie von der höhern Zahlenlehre getrenntes, Ganzes aus.

Da aber die Zahlen, so wie die Verbindungsarten derselben bloße Begriffe, bloß in uns (subjektiv) sind, und wir unserm Geiste, wegen der Beschränktheit desselben, immer durch die Sinne zu Hilfe kommen müssen, so müssen wir

auch statt der Zahlen und ihrer Verbindungsarten gewisse Zeichen (Bilder) setzen, um durch die Anschauung dieser Bilder in unserm Geiste immer die damit bezeichneten Begriffe erregen zu können. So sind die durch die Bilder 2 und 3 bezeichneten Zahlen in dem Bilde $2 + 3$ durch die Addizion, in $2 . 3$ durch die Multiplikazion, in $2^3$ durch die Potenzirung verbunden. Eben so drücken die Bilder $5 - 2$, $\frac{6}{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $8 ? 2$, resp. aus, daß 5 und 2 durch die Subtrakzion, 6 und 2 durch die Division, 8 und 3 durch die Radikazion, und 8 und 2 durch die Logarithmazion verbunden werden sollen.

Indem wir aber alle Begriffe durch Zeichen versinnlichen, bekommen wir bloß Bilder an die Stelle der Begriffe, die Zahlenlehre wird dann eigentlich eine Zahlbilderlehre. Alles was geschieht, geschieht bloß mit Bildern, nach Gesetzen die durch Bilder (Formeln) ausgedrückt sind, und so können wir mit diesen Bildern fortarbeiten ohne uns nur um die Bedeutung derselben zu bekümmern, ja wenn sie selbst gar keine Bedeutung haben. Dieß ist der Entstehungsgrund der so genannten negativen, gebrochenen und irrazionalen Zahlen. Weit entfernt Zahlen zu seyn, sind sie bloß Bilder, die die Form der Zahlbilder

der haben, mit denen man der Form nach, nach den durch Bilder ausgedrückten Gesetzen fortarbeitet, die selbst aber keine Zahl bezeichnen, also gar keinen Gehalt haben. Da man Zahl und Zahlbild so häufig verwechselt, so nennt man die wirklichen Zahlbilder im Gegensatz jener Formen, resp. positive, ganze und razionale Zahlen.

Um ferner die allgemeinsten Eigenschaften der Zahlen zu erhalten, muß man erstlich von der Menge der Einheiten abstrahiren, die Zahl unbestimmt betrachten, und für solche Zahlen beliebige Zeichen (z. B. Buchstaben) setzen. Dann muß man aber auf die Menge der Einheiten Rücksicht nehmen, bestimmte Zahlen betrachten, d. h. die verschiedenen Stellen, die die Zahlen in der Zahlenreihe behaupten, berücksichtigen und für solche Zahlen eine Bezeichnung einführen, durch welche man in den Stand gesetzt wird sogleich an den Zeichen diese verschiedenen Stellen zu erkennen. Dieß bewirkt das so genannte Zahlensystem. Auch diese Bezeichnung führt eine Form mit sich, die man Decimalbruch nennt (die aber eigentlicher systematischer Bruch heißen könnte).

Diesen Andeutungen zu Folge habe ich nun vorliegende Elementarzahlenlehre bearbeitet. In den 4 ersten Kapiteln betrachtete ich bloß unbe-

stimmte Zahlen. Die in den 3 ersten Kapiteln aufgestellten Lehrsätze erhielt ich, indem ich von den 8 Zahlbildern, nehmlich das einfache, dann die Summe, Differenz, Produkt, Quozient, Potenz, Wurzel, Logarithme, je zwey verband und zwar der Reihe nach durch die Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion, Division, Potenzirung, Radikazion und Logarithmazion, und dann alle Bilder aufsuchte, die dieselbe Zahl, als die so eben erhaltenen, bezeichneten *). Um indessen nicht durch überflüssige Weitläufigkeit zu ermüden, stellte ich die dadurch erhaltenen Lehrsätze nicht alle auf, sondern ließ diejenigen weg die leicht durch andere, mehrmals angewendet, ersetzt werden können.

Das vierte Kapitel enthält eine allgemeine Methode mittelst der vorhergehenden einfachen Sätze, zusammengesetztere nach Willkühr zu bilden, und bahnt sonach den Uebergang von der Elementarzahlenlehre zur höhern.

Im fünften Kapitel stellte ich dann die Bezeichnung der bestimmten Zahlen auf (das soge-

nannte

*) Daß der binomische Lehrsatz hieher gehöre, erhellet unmittelbar, weil er lehrt wie eine Summe $a+b$ mit einer Zahl $m$ potenzirt wird, so wie der Satz $(a+b).m = am + bm$ lehrt, wie man eine Summe $a+b$ mit $m$ multiplizirt.

nannte Zahlensystem), und im 6ten, 7ten und 8ten Kapitel lehrte ich endlich, wie die 7 Zahlbilder Summe, Differenz rc. rc. Logarithme, deren beyde einfachen Bilder, Bilder bestimmter Zahlen sind, durch gleichgeltende Bilder bestimmter Zahlen ersetzt werden können.

Anfangs war ich Willens in einem Bande die reine Elementar-, in einem zweyten die reine höhere und in einem dritten Bande die angewandte Zahlenlehre erscheinen zu lassen. Weil ich aber die Elementarzahlenlehre (in Verbindung mit einem, zu akademischen Vorlesungen geeigneten, Leitfaden der Geometrie, der vielleicht bald erscheinen dürfte) auch bey meinen Vorlesungen über sogenannte reine Elementar-Mathematik zu Grunde legen wollte, so fügte ich den Anhang bey, über welchen wohl nichts weiter zu sagen seyn dürfte, als daß er in Verbindung mit der reinen Elementarzahlenlehre, die sogenannte Elementar-Arithmetik erschöpft.

In der höhern Zahlenlehre werde ich dann eine gleiche Einrichtung treffen.

Da ich von dem Grundsatz ausgehe, daß der Zweck der akademischen Studien darin bestehe, eine rein wissenschaftliche Uebersicht der einzelnen Lehren zu erhalten um dadurch in den Stand gesetzt zu werden zur beliebigen Zeit weiter in die

be-

besondern Zweige der Wissenschaft einzudringen, so zweifle ich keinen Augenblick, daß nicht diese Blätter, an und für sich, als Leitfaden zu akademischen Vorlesungen besonders brauchbar seyn sollten. Um aber selbigen auch an andern höhern Lehranstalten, und für solche, welche der Hilfe des Lehrers gänzlich entbehren, dieselbe und, wo möglich, eine noch größere Brauchbarkeit zu verschaffen, suchte ich eine Einrichtung zu treffen, wodurch das Ganze leicht faßlicher wird. Zu dem Ende habe ich den meisten Paragraphen Noten, mit kleinerer Schrift gedruckt, beigefügt. Diese Noten gehören nicht zu dem Lehrgebäude, sondern sollen nur denen zur Erläuterung dienen, die den Paragraphen, wegen seiner größern Abstrakzion nicht gefaßt haben. Außerdem können sie auch noch den zweyten Vortheil gewähren, daß der Anfänger durch sie eher daran gewöhnt wird, vom Besondern zum Allgemeinen sich zu erheben (worauf der Lehrer nie genug Rücksicht haben kann), und dadurch der Zweck: „wissenschaftliche Bildung zu erlangen" weit eher erreicht werden wird*).

Fer-

*) Uebrigens halte ich es für gut, mit Schülern anfänglich bloß die beyden ersten Kapitel, vom dritten aber nur die

Ferner habe ich zu gleichem Endzwecke, den Inhalt der meisten durch Zeichen ausgedrückten Sätze immer auch wörtlich ausgedrückt, und zwar, weil ich dabey mehr auf Anwendung Rücksicht genommen habe, unter der Form von Regeln, deren jeder Satz zwey enthält. Dieß unterließ ich zuletzt, um nicht allzuweitläufig zu werden. Doch rathe ich jedem Lehrer, sich von dem Schüler jede dieser Formeln auf die angegebene Art wörtlich wiederholen zu lassen, indem dieß das sicherste Mittel ist, den Verstand des Schülers zu bilden und ihn mit der wahren und richtigen Bedeutung der Formeln schnell und leicht vertraut zu machen.

Auch habe ich bey der Ausarbeitung des Gegenwärtigen immer einen Leser vorausgesetzt, der noch nie Ziffern gesehen also noch nie Rechenkunst getrieben hat, sondern nur gewöhnliche Geisteskraft und guten Willen besitzt. Um daher allen Klagen über Schwerverständlichkeit von Seiten derjenigen, die sich durch die Zeichen und Formeln abschrecken lassen, ein für allemal und gänzlich zu begegnen, verweiße ich sie auf diesen Umstand, und darauf, daß ich die Sätze, auf die sich der Vortrag zunächst bezieht, allenthalben citirt habe, so daß sich jeder durch Nachschlagen Rath und Hilfe verschaffen kann. Dieses Nachschla-

die wenigen Sätze der Potenzen durchzugehen, und dann sogleich zum vierten und den folgenden Kapiteln zu schreiten. Die Anwendung der Sätze der Wurzeln und Logarithmen liegt dem Anfänger nicht so nahe; jene Sätze würden ihn daher fürs erste nur ermüden. Später können sie nachgeholt werden.

schlagen ist aber höchst nöthig, und ich bürge einem jeden, der sich diese Mühe, die ich durch die Einrichtung des Druckes noch zu erleichtern gesucht habe, nicht verdrießen läßt, daß ihm selbige durch den herrlichsten Erfolg belohnt werden wird. Ja ich rathe dieses Nachschlagen um so dringender an, je mehr meine Definizionen der Gleichheit, der Operazionen selbst ꝛc. ꝛc. von den gewöhnlichen verschieden sind, und meine Sätze, sobald man diese Begriffe mit den gewöhnlichen verwechselt, nur unvollkommen, vielleicht gar nicht verstanden werden könnten.

Die höhere Zahlenlehre hat aus Gleichungen, nach der Angabe des 4ten Kapitels, neue Gleichungen zu entwickeln. Jeder Ausdruck aber (also auch jede Seite einer Gleichung) so zusammengesetzt er seyn mag, ist doch zuletzt nur aus zwey Zahlbildern zusammengesetzt (die aber selbst wieder zusammengesetzt seyn können u. s. w.), ist daher immer eines von den oben angeführten 8 Zahlbildern. Da nun die Elementarzahlenlehre alle die Sätze enthält, welche lehren, wie man zwey dieser Zahlbilder durch jede der 7 Operazionen verbindet, so kann der Schüler in der Algebra auf keinen Fall stoßen, in welchem ihn die Elementarzahlenlehre nicht vollkommen genügte. Man untersucht zuerst, welche von den 8 Zahlbildern die beyden mit einander zu verbindenden Ausdrücke sind, und darf dann in der Elementarzahlenlehre nur den Satz oder die Sätze nachschlagen, welche die Art zu operiren angeben. Sind beyde Ausdrücke einfache Zahlbilder, so geschieht die Verbindung derselben

selben immer bloß nach (§§. 11. 12. 29. 30. 56. 57. und 58.). Wenn aber beyde Zahlbilder zu den 7 letztern gehören, und der fragliche Satz sich nicht vorfinden sollte (weil ich deren ausgelassen habe), so darf man nur eines davon als ein einfaches ansehen, und dann nach dem hieher gehörigen Satz operiren; und nie wird man fehlen alles, was verlangt wird, hervorzubringen.

Dieselbe Verfahrungsart ist auch höchst nöthig um die Beweiße der in den 3 ersten Kapiteln aufgestellten Sätze verstehen zu können. Da in diesen Beweißen nichts weiter vorkommt als Verwandlungen eines Ausdrucks in einen andern, bis zuletzt das Verlangte sich ergiebt, so darf man nur immer wissen, welches von den 7 Zahlbildern der gegebene Ausdruck ist, welches die beyden Zahlbilder sind, aus denen er besteht, und durch welche der 7 Operazionen diese beyden mit einander verbunden sind (alles dieses giebt die Bezeichnung an), und man wird dann nach dem jedesmal citirten Satze die Verbindung vornehmen und leicht den nächstfolgenden Ausdruck erhalten können *).



*) Das erste und nöthigste ist also, daß man sich mit der Bezeichnung vollkommen vertraut mache, um die Gattung eines gegebenen Zahlbildes genau und bestimmt angeben zu können. Ich habe daher auf die Bezeichnung große Sorgfalt verwendet. Dem Lehrer ist es endlich nicht genugsam zu empfehlen darauf Rücksicht zu nehmen, und zu dem Ende sich von dem Schüler bey jeder Gelegenheit die Art der Ausdrücke angeben, und überhaupt die Ausdrücke selbst zergliedern zu lassen. Es ist erstaunlich wie die Bezeichnung gewöhnlich vernachläßigt wird, während doch die Zeichen die Stelle der Begriffe

Alle in den 4 ersten Kapiteln aufgestellten Sätze sind nur erwiesen worden unter der Voraussetzung, daß die Buchstaben sogenannte ganze Zahlen bezeichnen, und überhaupt bloß (ganze) Zahlen zum Vorschein kommen. In den (§§. 24. 53. und 100.) habe ich aber gezeigt, daß alle Gleichungen auch für die Formen, die man negative, gebrochene, und irrazionale Zahlen nennt, überhaupt für alle Formen statt finden müssen. Das (=) Zeichen drückt (nach E. §. 7.) nichts anders aus, als daß beyde Ausdrücke, zwischen denen es steht, eine und dieselbe Zahl bezeichnen, und dieß will nichts weiter sagen, als daß statt des einen dieser Zahlbilder das andere gesetzt werden könne. Dieselbe Bedeutung behält denn das Gleichheitzeichen, wenn die beyden Bilder, zwischen denen es steht, keine (ganze) Zahlen bezeichnen, also bloße Bilder sind. Anders ist es aber mit den im 4ten Kapitel vorkommenden Ungleichungen. Nach (§. 9.) bezeichnet das Zeichen (>), daß die eine Zahl später folge in der Zahlenreihe als die andere, und dieß dehnte ich im (§. 106.) dahin aus, daß zur letztern noch eine andere addirt werden müsse, um erstere zu geben. Sobald nun die Zahlbilder bloße Bilder sind, und keine Zahlen bezeichnen, hat das Zeichen (>), folglich haben dann auch die Ungleichungen selbst keine fernern Bedeutungen. Da aber in der Anwendung der Zahlenlehre gezeigt wird

---

griffe vertreten, und man mit der Unbestimmtheit der Zeichen auch dieselbe Unbestimmtheit der Begriffe hat, der Zweck des Unterrichts also beynahe gänzlich verfehlt wird.

wird, daß eine gebrochene Zahl auf ein Ding als Einheit bezogen ein wirkliches Ding giebt, so erhellet denn, daß eine ganze und eine gebrochene benannte Zahl zusammengenommen ein Ding gegeben werden, das größer (in dem Sinne des Anhangs §. 5.) ist, als die ganze benannte Zahl. In dieser Bedeutung kann und muß man das Zeichen (>) beybehalten, aber dann muß man erst genau untersuchen, ob nun auch alle diese Ungleichungen (der §§. 108. u. 109.) gelten werden oder nicht, und diese Untersuchung werde ich, nebst mehreren ähnlichen andern, in der höhern Zahlenlehre anstellen.

Uebrigens gestehe ich, daß das in den (§. §. 24. 53. u. 100.) Gesagte sehr unvollkommen und eine bloße Andeutung dessen ist, was ich in dieser Hinsicht gedacht habe. Für Denker mag diese Andeutung hinlänglich seyn, um mittelst derselben zu der vollkommenen Ueberzeugung zu gelangen, die in mir klar und lebendig vorhanden ist; für Nichtdenker aber möchte auch eine weitläufigere Auseinandersetzung nicht von größerm Nutzen gewesen seyn. Deswegen wählte ich diejenige Seite der Darstellung, auf welcher das Ganze für Anfänger am meisten leichtfaßlich und einleuchtend wird. Eine vernünftige Beurtheilung sachkundiger und vorurtheilsfreyer Männer hierüber wird mir jederzeit sehr angenehm seyn, und von mir mit dem herzlichsten Dank aufgenommen werden; indem ich keinen andern Wunsch hege, als der Wahrheit so nahe zu kommen als möglich, und so viel wie möglich durch meine Kräfte zu nützen. Der unberuffenen Tadler wegen

gen muß ich aber noch hinzufügen, daß im schlimmsten Falle, wenn nehmlich meine Ansichten nicht für gründlicher anerkannt würden, als die bis jetzt vorhandenen, ich mich anheischig mache, von jeder bis jetzt erschienenen mir öffentlich genannten Arithmetik oder Algebra, eben so öffentlich zu zeigen, daß hinsichtlich der Evidenz ihrer Sätze wenigstens dieselben Schwierigkeiten obwalten, ohne jedoch dadurch den vielen guten, deren wir uns zu erfreuen haben, zu nahe treten zu wollen.

Endlich bemerke ich noch, daß ich, meinen eigenen im vorhergehenden angegebenen höchst einfachen Weg gehend, alle vorgetragenen Sätze mit der größten Einfachheit erhielt und nothwendig erhalten mußte, daß ich mich aber dennoch aller Ansprüche darauf begebe, sondern mich mit dem begnüge, was man mir als mein Eigenthum übrig lassen wird. Das Beyspiel (§. 179) habe ich aus Abel Bürja's selbstlernenden Algebraisten, das Zeichen des Logarithmen aber (?) als ein, dem von Bürja gebrauchten, vorzuziehendes aus H. Aug. Rothe's Arithmetik genommen.

Sobald Zeit und Umstände es erlauben, werde ich die höhere Zahlenlehre nach demselben Prinzip der Vereinfachung ausarbeiten und dem Druck übergeben.

Erlangen im May 1816.

Martin Ohm.

---

Ein-

# Einleitung.

§. 1. Das wiederholte Setzen eines Dinges leitet auf den Begriff der Zahl; das gesetzte Ding, abstrakt genommen, heißt die absolute Einheit (auch bloß Einheit). Man sagt: die Zahl bestehe aus einer Menge von Einheiten, und versteht nichts anders darunter, als: die Zahl entstehe durch das Setzen irgend eines Dinges und das Wiederholen desselben.

Zu §. 1. Da nehmlich die Zahl durch wiederholtes Setzen eines jeden Dinges (Elle, Zoll, Dukaten ꝛc.) erzeugt wird, so hängt sie nicht von der verschiedenen Beschaffenheit dieses Dinges ab. Die Einheit ist demnach das gesetzte Ding, in so ferne man auf keine besondere Eigenschaft desselben Rücksicht nimmt; und dies drückt man aus, indem man sagt: das Gesetzte sey abstrakt genommen.

§. 2. Die Lehre der Zahlen heißt Zahlenlehre.

§. 3. Durch das wiederholte Setzen der Einheit entsteht aber eigentlich eine Zahlenreihe, indem aus jeder Zahl durch nochmaliges Setzen der Einheit, die nächstfolgende Zahl erzeugt wird; und zwey Zahlen unterscheiden sich durch nichts von einander, als durch die verschiedenen Stellen, die sie in dieser Zahlenreihe einnehmen. Eine Zahl heißt höher oder größer, als eine andere, wenn sie

auf jene andere in der Zahlenreihe **folgt**; jene andere, die dieser in der Zahlenreihe **vorhergeht**, heißt dann **niedriger** oder **kleiner** als diese.

§. 4. Berüksichtigt man die Stelle, die eine Zahl in der Zahlenreihe einnimmt, **nicht** (nimmt man nicht Rüksicht auf die bestimmte Menge ihrer Einheiten), so heißt die Zahl eine **unbestimmte**, im Gegentheil eine **bestimmte** Zahl.

Um die allgemeinsten Eigenschaften der Zahlen zu erhalten, werden wir zunächst bloß unbestimmte Zahlen betrachten, und dann erst zur Betrachtung der bestimmten Zahlen den Uebergang machen.

Zu §. 4. So z. B. ist die Zahl der in einem Haufen befindlichen Groschen unbestimmt, so lange nicht (durch sogenanntes Zählen oder auf andere Art) die Stelle angegeben ist, die diese Zahl der Groschen in der Zahlenreihe behauptet. Nichts desto weniger ist sie eine Zahl und, als solche, gewissen Gesetzen unterworfen, die eben in der Zahlenlehre, als allgemeinste Eigenschaften der Zahlen, zu entwickeln sind.

§. 5. Die Zahlen überhaupt, da sie bloß **in uns** sind, muß man durch Bilder (Zeichen) bezeichnen, um sie an diesen Zeichen erkennen zu können. Die Bilder der bestimmten Zahlen müssen so beschaffen seyn, daß man aus dem Bilde einer jeden Zahl, das Bild der in der Zahlenreihe nächstvorhergehenden und nächstfolgenden Zahl anzugeben im Stande ist, so daß an dem Bilde die Stelle erkannt wird, welche die durch selbiges bezeichnete Zahl in der Zahlenreihe hat. Die ersten Zahlen der Zahlenreihe (d. h. die ersten bestimmten Zahlen)

len) bezeichnet man durch die Bilder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, bey denen man bloß dadurch, daß man ihre Folge im Gedächtniß behält, die Stellen weiß, welche die durch sie bezeichneten Zahlen in der Zahlenreihe einnehmen *).

Unbestimmte Zahlen kann man durch willkührliche Bilder bezeichnen, und man nimmt dazu am gewöhnlichsten Buchstaben.

Um auszudrücken, daß man an irgend einer Stelle, an welcher ein Zahlbild stehen könnte oder müßte, keine Zahl gesetzt wissen wolle, bedient man sich des Zeichens o und spricht es aus durch Null.

Zu §. 5. Hat man z. B. ein Stück Tuch nicht gemessen, und weiß man weder den Preiß einer Elle, noch den des ganzen Stückes; so ist die Zahl der Ellen, die dieses Stück Tuch enthält, unbestimmt, und man kann sie mit a bezeichnen; eben so ist die Zahl der Gulden, welche eine Elle und welche das ganze Stück gekostet hat, unbestimmt, und man kann erstere mit b, letztere mit c bezeichnen. So oft nun, in dieser Untersuchung, die Buchstaben a, b, c, vorkommen, so weiß man, daß der erste a statt der Zahl der Ellen Tuch, der zweyte b statt der Zahl der Gulden die eine Elle, und der dritte c statt der Zahl der Gulden stehe, die das ganze Stück gekostet hat.

In einer andern Untersuchung kann a eine Zahl von Thalern, b eine Zahl von Pfunden u. s. w. bezeichnen, und immer wird man, in derselben Untersuchung



*) Wie man die weiter folgenden bestimmten Zahlen bezeichnet, um den angeführten Zweck zu erreichen, wird im fünften Kapitel gezeigt werden.

chung, durch die Bilder a, b, c zu den Zahlen zurückgeführt, die sie bezeichnen.

Anmerk. Jeder Buchstabe also, der in der Zahlenlehre vorkommen wird, bezeichnet immer eine Zahl, und zwar eine unbestimmte Zahl, d. h. eine Zahl, bey welcher man auf die bestimmte Menge ihrer Einheiten nicht Rücksicht nimmt; während die Bilder 1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. auch Zahlen bezeichnen, aber bestimmte Zahlen, d. h. Zahlen, die man durch die verschiedenen Stellen unterscheidet, die sie in der Zahlenreihe behaupten.

Da die Zahlen bloß in uns sind, so verwechselt man beständig das Bild einer Zahl mit der Zahl selbst; sagt z. B. die Zahl a, die Zahl 7 ꝛc., während man sagen sollte: die Zahl, die durch das Bild a oder durch das Bild 7 bezeichnet ist. Diese Verwechslung bringt indessen keinen Nachtheil, so bald man nur immer auf diese Verschiedenheit gehörig Rücksicht nimmt, weswegen ich hier ein für allemal darauf aufmerksam mache.

§. 6. Eine Zahl wird öfters (wie die Folge lehren wird) aus andern Zahlen zusammengesetzt gedacht, und um dies auszudrücken, muß man das Bild derselben auch aus den Bildern jener andern zusammensetzen und diese Bilder durch ein Zeichen verbinden, welches die Art jener Zusammensetzung anzeigt. Ein jedes Bild einer Zahl, einfach oder zusammengesetzt, heißt ein Zahlen Ausdruck (oder schlechthin Ausdruck).

Zu §. 6. So z. B. zeigt man an, daß die durch 7 bezeichnete Zahl aus der Vereinigung der durch die Bilder 4 und 3 bezeichneten Zahlen entstehe, indem man selbige

bige auch durch das Bild $4 + 3$ bezeichnet. Jedes Bild nun wie $4$, $3$, $4 + 3$ ꝛc. nennt man einen Ausdruck.

§. 7. Zwey oder mehr Ausdrücke, sagt man, sind einander gleich, wenn jeder dieselbe Zahl bezeichnet: und um solches bildlich auszudrücken, bedient man sich des Zeichens ($=$), des Gleichheitzeichens, welches man zwischen die Ausdrücke setzt. Das Bild $m = n = p = q$ drückt also aus, daß die Bilder m, n, p, q alle eine und dieselbe Zahl bezeichnen.

Gleiche Ausdrücke kann man daher immer für einander substituiren, d. h. statt des einen kann man überall den andern setzen, und umgekehrt.

§. 8. Verbindet man immer bloß zwey Ausdrücke durch das ($=$) Zeichen, so heißt das entstehende Bild eine Gleichung. Eine Gleichung wie $a = m$ oder $7 = 4 + 3$ drückt also nichts anders aus, als daß die Bilder a und m eine und dieselbe Zahl, desgleichen die Bilder 7 und $4 + 3$ eine und dieselbe Zahl bezeichnen. Die beyden Ausdrücke, die durch das Zeichen ($=$) verbunden (die einander gleich) sind, heißen die Seiten der Gleichung.

§. 9. Bezeichnen zwey Ausdrücke nicht dieselbe Zahl, so muß der eine eine höhere (größere), der andere eine niedrigere (kleinere) Zahl bezeichnen; und man stellt dies bildlich dar, indem man zwischen beyde das Zeichen $>$ oder $<$ setzt, so daß das Bild der kleinern Zahl an die Spitze zu stehen kommt. Das Bild $n < m$ oder $m > n$ drückt

dem-

demnach aus, daß n eine kleinere Zahl bezeichne als das Bild m. Eben so drücken die Bilder 8 > 5 oder 5 < 8 aus, daß das Bild 5 eine kleinere Zahl bezeichne als das Bild 8.

Ein solches Bild wie a > b oder b < a heißt eine Ungleichung.

§. 10. Stellt man nun eine Anzahl erster einfacher Sätze der Zahlenlehre, die jeder beliebigen Untersuchung zur Grundlage dienen, als ein abgeschlossenes Ganzes auf, so hat man die Elementarzahlenlehre. Die über diese hinausgehenden Sätze der Zahlenlehre können dann unter dem Namen der höhern Zahlenlehre (gewöhnlich Algebra) vereinigt werden.

# Erstes Kapitel.

## Von der Addizion und Subtrakzion unbestimmter Zahlen.

§. 11. Die Zahl c, die so viele Einheiten hat, als zwey andere Zahlen a und b zusammengenommen, bezeichnet man durch das Bild a + b und nennt dieses Bild die **Summe der beyden Zahlen** a und b. Man sagt: die beyden Zahlen a und b werden **addirt**, wenn man sie durch das Zeichen (+) zur Summe verbindet. Dieses Zeichen (+) heißt das **Zeichen der Addizion** und wird durch plus oder und ausgesprochen; die Zahlbilder a und b selbst, in so ferne sie die Summe bilden, heißen die **Summanden** der Summe *).

Zu §. 11. Man habe z. B. zwey Haufen Groschen vor sich (deren Anzahl man nicht weiß), so kann man die Anzahl des ersten Haufen mit a, die des zweyten aber mit b bezeichnen. Denkt man sich nun beyde Haufen in

*) Ich muß hier nochmals wiederholen, daß man beständig Zahl mit Zahlbild verwechselt, daß dies auch hier geschieht, daß aber diese Verwechslung keinen Nachtheil gewährt, wenn man nur immer Rücksicht darauf nimmt.

Eben so muß ich nochmals bemerken, daß die Noten **nicht** zum Lehrgebäude gehören, sondern nur zur Erläuterung dienen sollen. Man sehe hierüber die Vorrede, die ich überhaupt nicht zu übersehen bitte.

in einen einzigen zusammengeschoben, so wird dann die Anzahl Groschen dieses neuen Haufen durch a + b bezeichnet. Man kann diese Anzahl auch durch irgend ein beliebiges Bild z. B. c bezeichnen, aber, indem man sie durch a + b bezeichnet, drückt man zugleich aus, daß selbige durch Vereinigung der beyden, durch a und durch b bezeichneten, Zahlen von Groschen entstanden ist.

§. 12. Die Zahl a, deren Einheiten mit den Einheiten einer Zahl b zusammengenommen, die Einheiten einer Zahl c ausmachen, bezeichnet man durch das Bild c – b, und nennt dieses Bild die *Differenz* (Unterschied, Rest) *der beyden Zahlen* c *und* b. Verbindet man beyde Zahlbilder c und b zur Differenz c — b, so sagt man: man *subtrahire* die Zahl b von der Zahl c. Das Zeichen (—) heißt deswegen das *Zeichen der Subtrakzion* und wird durch *minus* oder *weniger* ausgesprochen. In dem Bilde c — b heißt das Bild c zur linken des (—) Zeichens der *Minuend*, das zweyte b zur rechten, der *Subtrahend*.

Zu §. 12. Soll z. B. der in vorhergehender Note zuletzt entstandene Haufen Groschen, deren Anzahl man mit c bezeichnen kann, unter zwey Personen vertheilt werden, und ist die Anzahl Groschen, welche die erste davon erhält, mit b bezeichnet, so wird dann die Anzahl Groschen, die der zweyten Person zu Theil werden, durch c — b bezeichnet. Man könnte sie zwar auch durch ein beliebiges Zeichen z. B. a bezeichnen; aber, indem man sie durch c — b bezeichnet, drückt man zugleich aus, daß sie mit der Anzahl Groschen b, die die erste Person erhalten, zusammengenommen die durch c bezeichnete Anzahl der im ganzen Haufen befindlichen Groschen ausmache.

Man

Man muß sich hüten, den gewöhnlichen Begriff der Worte: Addiren und Subtrahiren mit dem hier aufgestellten nicht zu verwechseln. Gewöhnlich sagt man: man habe beyde Zahlen 24 und 15 addirt oder subtrahirt, wenn man die Bilder 39 oder 9 erzeugt hat. Hier aber hat man sie addirt oder subtrahirt, so bald man sie durch das Zeichen + oder − verbunden (also die Bilder 24 + 15 oder 24 − 15 erzeugt) hat. Gewöhnlich heißt das Bild 39 die Summe und 9 die Differenz der beyden Zahlen 24 und 15, hier aber heißt nur das Bild welches entsteht wenn zwey Zahlbilder durch das Zeichen + verbunden sind (also 24 + 15) die Summe, und nur das Bild 24 − 15 die Differenz der beyden Zahlen 24 und 15.

§. 13. Jede Summe, so wie jede Differenz besteht also immer aus zwey Zahlbildern die durch das Zeichen (+) oder (—) verbunden sind. Diese Zahlbilder können aber entweder einfach (einzelne Buchstaben oder andere Zeichen) oder zusammengesetzt, können also selbst wieder Summen oder Differenzen seyn, und in diesem letztern Falle pflegt man die beyden Summanden der Summe oder den Minuenden und Subtrahenden der Differenz durch Klammern erkennbar zu machen. Dieses ist höchst nöthig, weil ein und derselbe Ausdruck, je nachdem man ihn anders erkennt, zwey und mehr verschiedene Zahlen bezeichnen kann. Die Klammern können daher nur dann weggelassen werden, wenn entweder 1) selbige auf andere Art ersetzt sind, oder wenn 2) erwiesen ist, daß der Ausdruck immer dieselbe Zahl bezeichne, wie man ihn auch erkennen mag.

Zu §. 13. Ein Kaufmann habe ein Stück Tuch, dessen Ellenzahl wir durch m bezeichnen wollen. Eine Person läßt sich eine Anzahl Ellen davon abschneiden; eine zweyte Person thut dasselbe. Die Anzahl der Ellen der ersten Person wollen wir mit a bezeichnen, die der zweyten Person mit p, so wird die Anzahl aller abgeschnittenen Ellen durch $a + p$, und die Anzahl der übrig bleibenden Ellen durch $m - (a + p)$ bezeichnet. Hätten wir aber angenommen, daß nur die erste Person sich hätte abschneiden lassen, so würde dann die Anzahl der übrig gebliebenen Ellen bezeichnet durch $m - a$. Hätte nun die zweyte Person (statt sich vorher p Ellen abschneiden zu lassen) jetzt dieselbe Anzahl Ellen desselben Tuchs dem Kaufmann noch gebracht, so würde dann die Anzahl aller vorhandenen Ellen durch $(m - a) + p$ bezeichnet. Der Kaufmann muß jetzt weit mehr Ellen Tuch haben als er vorher hatte: die Ausdrücke $m - (a + p)$ und $(m - a) + p$ bezeichnen zwey ganz verschiedene Zahlen; und die Klammern sind also hier höchst nöthig, um einen bestimmten Ausdruck zu haben; denn ließe man sie weg, so würden beyde Ausdrücke in diesen einzigen $m - a + p$ zusammenfallen, der also, je nachdem man ihn so oder anders betrachtete, zwey verschiedene Zahlen bezeichnen würde.

In den Ausdrücken $(m + a) + p$, $(m + p) + a$, $m + (a + p)$ ꝛc. dagegen, dürfen die Klammern weggelassen werden, weil diese Ausdrücke (wie nachher folgt) immer eine und dieselbe Zahl bezeichnen, nehmlich die Zahl, die so viele Einheiten hat, als die durch m, a, p, bezeichneten Zahlen zusammengenommen.

§. 14. Das Bild $a + b$ bezeichnet also eine Zahl von der man nichts anders weiß, als daß sie so viele Einheiten enthält als die Zahlen a und b zusammengenommen haben. Eben so bezeichnet das Bild $c - b$ eine Zahl von der man nichts anders

ders weiß, als daß ihre Einheiten mit den Einheiten der Zahl b (des Subtrahenden) zusammengenommen die Einheiten der Zahl c (des Minuenden) ausmachen. Hieraus folgt:

1) Die Bilder $a+o$, $o+a$, $a-o$ bezeichnen nichts anders als die Zahl a selbst, d. h. es ist (E. §. 5. u. 7.):

$$a+o=a,\ o+a=a,\ a-o=a$$

2) Das Bild $a-a$ bezeichnet dasselbe was auch o (Null) bezeichnet, d. h. (1) u. §. 12.)

$$a-a=o$$

3) Das Bild $a+1$ bezeichnet die auf a folgende nächstgrößere Zahl, und das Bild $a-1$ die, der durch a bezeichneten Zahl, nächstvorhergehende kleinere. (E. §. 3. u. 5.)

4) Dahero nach (E. §. 5. u. 7.):

$1+1=2,\ 2+1=3,\ 3+1=4,\ 4+1=5$
$5+1=6,\ 6+1=7,\ 7+1=8,\ 8+1=9$
und $2-1=1,\ 3-1=2,\ 4-1=3,\ 5-1=4$
$6-1=5,\ 7-1=6,\ 8-1=7,\ 9-1=8$

5) Das Bild $b+a$ bezeichnet dieselbe Zahl, als das Bild $a+b$, d. h. es ist:

$$a+b=b+a.$$

6) Es ist $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$ rc. d. h. die Bilder $(a+b)+c$, $(a+c)+b$, $a+(b+c)$, rc. bezeichnen alle dieselbe Zahl, nehmlich die Zahl, die so viele Einheiten hat, als die durch a, b, c, bezeichneten Zahlen deren zusammengenommen haben. So oft da-

her

her ein Ausdruck aus mehreren Zahlbildern bloß durch Addizion zusammengesetzt ist, so ist es einerley in welcher Ordnung man diese Zahlbilder neben einander hinsetzt, in welcher Ordnung man sie mit einander verbindet. In diesem Falle kann man also (§. 13.) die Klammern, wodurch die beyden Summanden erkennbar gemacht werden, (aber nur diese) weglassen; statt obiger Bilder bloß schreiben $a + b + c$ oder $a + c + b$ oder $b + c + a$ u. s. w. Ein solches Bild kann man dann auch eine S u m m e m e h r e r e r S u m m a n d e n nennen.

7) Jede der drei Gleichungen

$a + b = c$; $c - b = a$ und $c - a = b$

drückt ein und dasselbe aus. Die erste drückt aus, daß c dieselbe Zahl bezeichne, die auch das Bild $a + b$ bezeichnet (E. §. 7.), d. h. die Zahl, die so viele Einheiten hat, als a und b zusammengenommen haben. Die zweyte drückt aus, daß a dieselbe Zahl bezeichne, die auch die Differenz $c - b$ bezeichnet, d. h. die Zahl, deren Einheiten mit denen der Zahl b zusammengenommen, die Einheiten des Minuenden c geben. Eben so drückt die dritte Gleichung aus, daß b dieselbe Zahl bezeichne, die auch die Differenz $c - a$ bezeichnet, d. h. die Zahl, deren Einheiten mit denen des Subtrahenden a zusammengenommen, die des Minuenden c erzeugen. Jede dieser drei Gleichungen drückt also aus, daß a, b, c, Zahlen bezeichnen, so daß die Einheiten der ersten

sten beyden zusammengenommen, die Einheiten der dritten geben. Statt jeder dieser drei Gleichungen kann man daher immer jede der beyden andern setzen.

8) Im Falle, daß eine der vorhergehenden drei Gleichungen gegeben wäre, könnte man überall $a+b$ statt $c$, $c-b$ statt $a$ und $c-a$ statt $b$ setzen (E. §. 7.). Thut man dies in diesen drei Gleichungen selbst, so erhält man

1) $a+b=a+b$, 2) $(a+b)-b=a$, 3) $(a+b)-a=b$,
4) $(c-b)+b=c$, 5) $c-b=c-b$, 6) $c-(c-b)=b$,
7) $a+(c-a)=c$, 8) $c-(c-a)=a$, 9) $c-a=c-a$.

Von diesen 9 Gleichungen drücken die 1te, 5te und 9te gar nichts aus; dann sind die 2te und 3te; dann die 4te und 7te, endlich die 6te und 8te, nicht wesentlich von einander verschieden, so daß sie sich alle auf folgende drei zurückbringen lassen:

I. $(a+b)-b=a$
II. $(a-b)+b=a$
III. $a-(a-b)=b$

Anmerk. Jede Gleichung kann benutzt werden, um statt eines Ausdrucks einen andern zu setzen, der dieselbe Zahl bezeichnet. In so ferne enthält sie immer zwey Regeln, nehmlich die erste, die angiebt, wie man den Ausdruck zur linken des = Zeichens in den zur rechten und dann die zweyte, die lehret, wie man den zur rechten in den zur linken verwandeln könne. Gebraucht man statt der

Zei-

Zeichen, die in den Definizionen angegebenen Worte, so kann man diese Regeln auch noch wörtlich ausdrücken. Die in den drei Gleichungen in 8) enthaltenen Regeln sind dann, in Worte ausgedrückt, folgende:

Für die Gleichung I. $(a+b)-b=a$

1) Wenn man von einer Summe $a+b$ den einen Summanden b subtrahirt, so erhält man den andern Summanden a.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man erstlich eine andere Zahl b zu ihr addirt, dann aber von dieser Summe $a+b$ dieselbe Zahl b wieder subtrahirt.

Für die Gleichung II. $(a-b)+b=a$

1) Wenn man zu einer Differenz $a-b$ ihren Subtrahenden b addirt, so erhält man den Minuenden a.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man erstlich eine andere Zahl b von ihr subtrahirt, dann zu dieser Differenz $a-b$ dieselbe Zahl b wieder addirt.

Endlich für die Gleichung III. $a-(a-b)=b$

1) Wenn man eine Differenz $a-b$ von ihrem Minuenden a subtrahirt, so erhält man ihren Subtrahenden b.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man selbige erstlich von einer beliebigen Zahl a sub-

subtrahirt, und dann diese Differenz $a-b$ von derselben Zahl $a$ nochmals subtrahirt *).

§. 15. Jeder Ausdruck, der, zu dem Subtrahenden einer Differenz addirt, deren Minuenden giebt, bezeichnet dieselbe Zahl, welche die Differenz auch bezeichnet (§. 14.) (ist der Differenz gleich (E. §. 7.)). So oft daher die eine Seite einer Gleichung (E. §. 8.) eine Differenz ist, so kann man sich von der Richtigkeit dieser Gleichung dadurch überzeugen, daß man die andere Seite derselben nimmt (unbekümmert welcher Ausdruck es ist), und dazu den Subtrahenden der Differenz addirt; ergiebt sich dann der Minuend, so bezeichnet jener andere Ausdruck dieselbe Zahl, die auch die Differenz bezeichnet; die Gleichung also richtig.

Zu §. 15. Will man z. B. die Richtigkeit der Gleichung $16-9=7$ nachweißen, deren Ausdruck zur linken eine Differenz ist, so nehme man den andern Ausdruck (zur rechten) 7, und addire dazu den Subtrahenden 9; ergiebt sich nun der Minuend 16, so ist die gegebene Gleichung $16-9=7$ richtig. Die Differenz $16-9$ bezeichnet nehmlich auch bloß die Zahl, die zu dem Subtrahenden 9 addirt, den Minuenden 16 giebt; die Bilder $16-9$ und 7 bezeichnen also dann dieselbe Zahl.

§. 16. Auf diesem Wege werden wir uns von

*) Ohnerachtet diese wörtlichen Ausdrücke der Regeln, die eine Gleichung enthält, höchst unvollkommen und überflüssig sind, so werde ich sie doch in der Folge, der Anfänger wegen, in den meisten Fällen den Gleichungen beyfügen. Man sehe hierüber die Vorrede.

von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen können:

$$\text{I. } (a+b)-c=(a-c)+b$$

denn, wegen der Differenz zur linken (der Ausdruck zur rechten ist eine Summe), hat man, nach (§. 15.):

$$[(a-c)]+b]+c=(§.\ 14.\ 6.))\ [(a-c)+c]+b$$
$$=(§.\ 14.\ 8)\ \text{II.})\ a+b\ ;$$

folglich die Richtigkeit der Gleichung nachgewiesen.

Wörtliche Regeln, die diese Gleichung enthält:

1) Von einer Summe a + b wird eine Zahl c subtrahirt, wenn man sie von dem einen Summenden a subtrahirt, den andern b aber ungeändert läßt.

2) Zu einer Differenz a — c wird eine Zahl b addirt, wenn man diese zu dem Minuenden a addirt, den Subtrahenden c aber ungeändert läßt.

Zu §. 16. So ist z. B. $(16+3)-9=(16-9)+3$; zur linken nehmlich hat man: $16+3=19$ und dann $19-9=10$; zur rechten aber: $16-9=7$ und dann $7+3=10$, wie zur linken.

Anmerk. Es sind daher alle folgende Ausdrücke einander gleich:

$$(a+b)-c=(§.\ 14.\ 5))\ (b+a)-c=(§.\ 16)$$
$$(b-c)+a=(§.\ 14.\ 5))\ a+(b-c)=(§.\ 16)$$
$$(a-c)+b=(§.\ 14.\ 5))\ b+(a-c).$$

Verbindet man immer nur zwey dieser Ausdrücke durch das = Zeichen, so erhält man hieraus mehrere verschiedene Gleichungen.

§. 17.

§. 17. Es ist:

$$\text{II. } a - (b + c) = (a - b) - c$$

denn zur linken hat man eine Differenz (zur rechten desgleichen); folglich nach (§. 15.):

$[(a-b) - c] + (b+c) =$ (§. 16.) $[(a-b) + (b+c)] - c$ = (§. 14. 6)) $([(a - b) + b] + c) - c$ = (§. 14. 8). II.) $(a + c) - c$ = (§. 14. 8). I.) $a$;

demnach die Gleichung erwiesen.

Die beyden Regeln dieser Gleichung sind:

1) Von einer Zahl a wird eine Summe b + c subtrahirt, wenn man von ihr erstlich den einen Summanden b, dann von dieser Differenz a — b auch noch den andern Summanden c subtrahirt.

2) Von einer Differenz a — b wird eine Zahl c subtrahirt, wenn man diese Zahl c zu dem Subtrahenden b addirt, den Minuenden a aber ungeändert läßt.

Zu §. 17. Es ist z. B. $16 - (4 + 5) = (16 - 4) - 5$; zur linken nehmlich hat man: $4 + 5 = 9$ und $16 - 9 = 7$; zur rechten aber: $16 - 4 = 12$ und $12 - 5 = 7$; wie zur linken auch.

§. 18. Folgende Ausdrücke bezeichnen daher wieder sämmtlich eine und dieselbe Zahl:

$a - (b+c) =$ (§. 14. 5)) $a - (c+b) =$ (§. 17.) $(a-c) - b$
$=$ (§. 17.) $(a - b) - c$.

Nach (Anmerk. §. 16.) giebt dies wieder eine Anzahl Gleichungen, von welchen wir, ausser der



Die Resultate sind hier gleich, aber das logische Gesetz nicht!

(§. 17.) aufgestellten, noch folgende herausnehmen wollen:

III. $(a - b) - c = (a - c) - b$

Beyde hieher gehörige Regeln fallen in folgende zusammen:

Wenn man von einer Differenz $a - b$ eine Zahl c subtrahiren soll, so subtrahire man sie von dem Minuenden a und lasse den Subtrahenden b ungeändert.

Zu §. 18. So ist z. B. $(9 - 4) - 3 = (9 - 3) - 4$; zur linken nehmlich hat man: $9 - 4 = 5$ und $5 - 3 = 2$; zur rechten aber erstlich $9 - 3 = 6$ und dann $6 - 4 = 2$ wie vorher.

§. 19. Es ist:

IV. $a - (b - c) = (a - b) + c$

denn der Ausdruck zur linken ist eine Differenz (der zur rechten eine Summe), dahero nach (§. 15.):
$[(a-b)+c] + (b-c) =$ (§. 14. 6)) $[(b-c)+c] + (a-b)$
$=$ (§. 14. 8) II.) $b + (a - b) =$ (§. 14. 5) u. 8) II.) $a$;
mithin die Gleichung erwiesen.

Die Regeln sind hier:

1) Von einer Zahl a wird eine Differenz $b - c$ subtrahirt, wenn man von ihr (der Zahl a) den Minuenden b subtrahirt, dann aber zur Differenz $a - b$ den Subtrahenden c addirt.

2) Zu einer Differenz $a - b$ wird eine Zahl c addirt, wenn man den Minuenden a ungeändert

dert läßt, die Zahl c aber von dem Subtrahenden b subtrahirt.

Zu §. 19. So ist z. B. $16-(7-5)=(16-7)+5$; zur linken nehmlich ist: $7-5=2$ und $16-2=14$; zur rechten aber: $16-7=9$ und $9+5=14$.

§. 20. Vergleicht man die Gleichung (IV. §. 19.) mit (Anmerk. §. 16.), so findet man:

$$a-(b-c)=(a-b)+c=c+(a-b)=(a+c)-b$$
$$=(c+a)-b=(c-b)+a=a+(c-b)=c-(b-a)$$

Von den 28 Gleichungen, die man hieraus erhält, wenn man immer zwey dieser Ausdrücke, die alle dieselbe Zahl bezeichnen, durch das Gleichheitzeichen verbindet, wollen wir, ausser den beyden (§. 16. und §. 19.) aufgestellten, nur noch folgende ausheben:

$$\text{V. } a-(b-c)=(a+c)-b.$$

Die Regeln, die sie enthält, sind:

1) Von einer Zahl a wird eine Differenz $b-c$ subtrahirt, wenn man zu ihr (der Zahl a) den Subtrahenden c addirt und dann von dieser Summe $a+c$ den Minuenden b subtrahirt.

2) Von einer Summe $a+c$ wird eine Zahl b subtrahirt, wenn man von dieser Zahl b den einen Summanden c, und dann diese Differenz $b-c$ von dem andern Summanden a subtrahirt.

Zu §. 20. Es ist z. B. $16-(9-6)=(16+6)-9$; zur linken nehmlich: $9-6=3$ und $16-3=13$; zur rechten aber: $16+6=22$ und $22-9=13$; wie vorher.

§. 21. Eben so ist:

VI. $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$;

denn der Ausdruck zur rechten ist eine Differenz (der zur linken eine Summe), folglich, nach (§. 15.): $[(a-b)+(c-d)]+(b+d)=$ (§. 14. 6)) $[(a-b)+b]+[(c-d)+d]=$ (§. 14. 8) II.) $a+c$;

demnach die Richtigkeit der Gleichung (VI.) erwiesen.

Regeln:

1) Zwey Differenzen $a-b$ und $c-d$ werden addirt, indem man ihre Minuenden a und c, dann auch ihre Subtrahenden b und d addirt, und die letztere Summe $b+d$ von ersterer $a+c$ subtrahirt.

2) Zwey Summen $a+c$ und $b+d$ werden von einander subtrahirt, wenn man die einzelnen Summanden a und b; c und d, von einander subtrahirt, und dann diese Differenzen $a-c$ und $b-d$ addirt.

Zu §. 21. Es ist z. B. $(16-5)+(8-2)=(16+8)-(5+2)$; zur linken nehmlich: $16-5=11$, $8-2=6$ und $11+6=17$; zur rechten aber: $16+8=24$, $5+2=7$ und endlich $24-7=17$; wie zur linken auch.

Anmerk. Nach demselben Satze ist (§. 14, 6)):

$[(a+c)-(b+d)]+(f-g)=(a+c+f)-(b+d+g)$

folglich:

$(a-b)+(c-d)+(f-g)=(a+c+f)-(b+d+g)$;

und so sieht man deutlich, wie man diesen Satz,

die

die Addizion der Differenzen enthaltend, durch mehrmalige Wiederholung desselben für so viele Differenzen, als man nur immer will, erweitern kann. Man addirt nehmlich in dem Ausdruck $(a-b)+(c-d)+(f-g)$ zuerst die beyden ersten Differenzen $a-b$ und $c-d$, und erhält $(a+c)-(b+d)$; zu dieser dann die dritte $(f-g)$, wodurch sich obiges Resultat ergiebt.

§. 22. Ferner ist:

$$\text{VII. } (a+b)-(c+b)=a-c;$$

denn, wegen der Differenz zur linken (der Ausdruck zur rechten ist ebenfalls eine Differenz) hat man, nach (§. 15):

$(a-c)+(c+b)=$ (§. 14. 6)) $[(a-c)+c]+b=$
(§. 14. 8) II.) $a+b$

welches zu zeigen war.

Regeln:

1) Zwey Summen $a+b$ und $c+b$, die einen gemeinschaftlichen Summanden b haben, werden von einander subtrahirt, indem man den gemeinschaftlichen Summanden b gegenseitig wegläßt, und bloß die beyden andern Summenden a und c von einander subtrahirt.

2) Eine Differenz $a-c$ bleibt unverändert, wenn man zu ihrem Minuenden a und Subtrahenden c eine und dieselbe Zahl b addirt.

Zu §. 22. So ist z. B. $(7+4)-(2+4)=7-2$ denn es ist zur linken: $7+4=11$, $2+4=6$ und $11-6=5$; zur rechten aber: $7-2=5$; wie vorher.

§. 23. Endlich ist:

$$\text{VIII. } (a-b)-(c-b)=a-c;$$

denn, wegen der Differenz zur linken (der Ausdruck zur rechten ist ebenfalls eine Differenz), ist, nach (§. 15):

$$(a-c)+(c-b)=(\text{§}.21)\,(a+c)-(b+c)=(\text{§}.22)\,a-b$$

folglich die Gleichung (VIII.) erwiesen.

Regeln:

1) Zwey Differenzen a — b und c — b, die einen gemeinschaftlichen Subtrahenden b haben, werden von einander subtrahirt, indem man den gemeinschaftlichen Subtrahenden b gegenseitig wegläßt, und bloß die Minuenden a und c von einander subtrahirt.

2) Eine Differenz a — c bleibt unverändert, wenn man von ihrem Minuenden a und Subtrahenden c eine und dieselbe Zahl b subtrahirt.

Zu §. 23. So ist z. B. $(16-7)-(11-7)=16-11$; zur linken ist nehmlich: $16-7=9$, $11-7=4$ und $9-4=5$; zur rechten aber: $16-11=5$; wie zur linken.

§. 24. Uebersieht man die vorhergehenden Sätze genauer, so findet man, daß selbige bloß das Verhältniß der Verbindung-Arten (Operazionen) zu einander ausdrücken, unabhängig von jeder bestimmten Zahl. Es scheint zwar, als wenn sie nicht so ganz unabhängig von den bestimmten Zahlen statt fänden, da nach (§. 12.) die Minuenden immer größer als die Subtrahenden seyn müssen

sen, wenn man wirkliche Zahlenausdrücke haben will. Allein diese Bedenklichkeit fällt weg, so bald man bemerkt, daß solche Differenzen, wie a — b, bey denen der Minuend a kleiner als der Subtrahend b ist, da sie keine Zahl bezeichnen, gar keine Bedeutung haben, daß man ihnen daher eine Bedeutung geben kann, folglich auch diejenige Bedeutung geben kann, die sie erhalten, wenn man alle Sätze der Differenzen auch für sie gelten läßt. In dieser Voraussetzung gelten also alle vorstehenden Sätze, was für Zahlen die Buchstaben nur immer bezeichnen mögen.

Zu §. 24. Fragt man mich also: was bedeutet die Differenz 5 — 8? so antworte ich: diese Differenz 5 — 8 bedeutet gar nichts, da die Differenz bloßes Zahlbild ist, diese aber keine Zahl bezeichnet. Allein unter der Voraussetzung, daß man alle Sätze der Differenzen auch für diese Differenz 5 — 8 gelten lassen wolle, hat man nach (§. 14. 8) II.): (5 — 8) + 8 = 5 und nach (§. 16.): (5 — 8) + 10 = (5 + 10) — 8 = 7 u. s. w. d. h. unter dieser Voraussetzung ist 5 — 8 ein Bild, welches zwar an sich keine Zahl bezeichnet, aber in Verbindung mit andern Zahlbildern 8, 10, ein wirkliches Zahlbild 5, 7, erzeugt.

Es kann also nicht die Frage seyn, ob alles was für Differenzen gilt, auch für 5 — 8 oder überhaupt für diejenigen Differenzen, deren Minuenden kleiner als ihre Subtrahenden sind, gelten werde; denn gerade nur dadurch, daß man alle Sätze der Differenzen auch für diese gelten läßt, bekommen diese Differenzen eine Bedeutung und können beybehalten werden, weil sie dann in Verbindung mit andern Zahlbildern wieder Zahlbilder geben und zu richtigen Resultaten führen.

Man

Man darf sich dabey nicht fürchten, daß die verschiedenen Sätze diesen Differenzen auch verschiedene Bedeutungen geben werden; denn alle diese Sätze sind aus einander und aus einem ersten abgeleitet, indem man immer bloß die vorhergehenden Formeln (Bilder) ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung anwandte. Die Bedeutungen, die diese Differenzen durch die verschiedenen Sätze erhalten, sind daher alle nach denselben Formeln von einander und von der ersten, aus (§. 14. 8) II.) hervorgehenden, Bedeutung abhängig, also nicht von einander unterschieden. So fand man vorhin, daß, wenn man zu 5 — 8, die Zahl 8 addirte, die Zahl 5, wenn man aber 10 addirte, die Zahl 7 zum Vorschein kam; d. h. so wie man eine um 2 größere Zahl addirte, wurde auch die Summe um 2 größer; ein, mit dem bey Zahlen sich ergebenden, übereinstimmendes Resultat.

§. 25. In der, im vorhergehenden Paragraphen gemachten, Voraussetzung arbeitet man also mit den Bildern fort, unbekümmert ob sie Zahlen bezeichnen oder bloß die Form der Zahlbilder haben; überzeugt, daß auch diese letztern zu richtigen und brauchbaren Resultaten führen.

Eben deswegen kann man auch statt der Minuenden das Bild o (Null) setzen, wie wir solches (§. 14. 1)) für die Subtrahenden und die Summanden einer Summe gethan haben. Setzt man nun in (VIII. §. 23.) statt des Bildes b das Bild a, so erhält man:

$$(a - a) - (c - a) = a - c \text{ oder } (\S.\ 14.\ 2))$$
$$o - (c - a) = a - c$$

d. h. statt jeder Differenz a — c kann man eine andere o — (c — a) setzen, deren Minuend o ist und

und deren Subtrahend c — a gefunden wird, wenn man den Minuenden a der gegebenen Differenz von ihrem Subtrahenden c subtrahirt.

Zu §. 25. Diesem nach ist z. B.:

$$4 - 7 = 0 - (7 - 4) = 0 - 3.$$

! falsch!

§. 26. Eine solche Differenz wie o — d, deren Minuend o ist, kann man kurz bezeichnen durch — d, indem man nur nicht vergessen darf, daß jedes solches Bild, wie — d, statt der Differenz o — d stehe. Die so bezeichnete Differenz — d nennt man eine negative Zahl, und, im Gegensatz dieser, die Zahlbilder selbst positive Zahlen (E. §. 5. Anmerk.).

Nach (§. 25.) hat man:

$$a - c = -(c - a)$$

und es kann demnach jede Differenz a — c in eine negative Zahl verwandelt werden, wenn man den Minuenden a von dem Subtrahenden c subtrahirt und dieser Differenz c—a das Zeichen (—) vorsetzt.

Zu §. 26. Dem zufolge erhält man z. B. $6 - 11 = -5$; $7 - 15 = -8$.

§. 27. Setzt man ferner in den Formeln (§§. 16. 17. 18. 20. 21.) statt der Minuenden das Bild o, so erhält man nach (§. 26.):

1) $b - c = (-c) + b$ (aus §. 16. für $a = 0$)
2) $-(b + c) = (-b) - c$ (aus §. 17. für $a = 0$)
3) $(-b) - c = (-c) - b$ (aus §. 18. für $a = 0$)
4) $a - (-c) = a + c$ (aus §. 20. für $b = 0$)
5) $(-b) + (-d) = -(b + d)$ (aus §. 21. für $a = c = 0$)

Aus

Aus 2), 3) und 5) folgt:

$$-(b+c) = (-b) - c = (-c) - b = (-b) + (-c)$$

Endlich folgt aus 4) wenn $a = o$ ist

$$6) \quad -(-c) = c.$$

Anmerk. Wollte man die Regeln, die diese Gleichungen enthalten, wörtlich angeben, so könnte dies am einfachsten auf folgende Art geschehen. Man stelle sich vor, daß jede positive Zahl das Zeichen (+) vor sich habe, nenne die Zeichen (+) und (—) entgegengesetzte Zeichen und sage:

1) Positive und negative Zahlen werden addirt, indem man sie neben einander schreibt, jede mit dem ihr vorgesetzten Zeichen. Z. B.
$(-b) + (-c) = (-b) - c = (-c) - b.$

2) Positive und negative Zahlen werden von einander subtrahirt, indem man dem Subtrahenden das entgegengesetzte Zeichen giebt und dann zu dem Minuenden addirt (nach 1)). Z. B. $a - (-c) = a + c$; $(-a) - (-c) = -a + c$; $-(-c) = +c = c.$

3) Zwey Zahlen, die dieselben Zeichen vor sich haben, werden addirt, indem man die Zahlen unabgesehen auf ihre Zeichen addirt, und der Summe dasselbe Zeichen vorsetzt, welches die Summanden hatten. Z. B.
$(-b) + (-c) = -(b + c)$;
$(-4) + (-7) = -(4 + 7).$

4) Zwey Zahlen, die verschiedene Zeichen vor sich haben, werden zu einander addirt, wenn man

man die Zahlen, unabgesehen auf ihre Zeichen, von einander subtrahirt, und der Differenz das Zeichen vorsetzt, welches der Minuend hatte. Z. B. $(-a)+b=b-a$ oder $(-a)+b=-(a-b)$; $(-4)+7=7-4$; $a+(-b)=a-b=-(b-a)$; $7+(-4)=7-4$; $(-7)+4=-(7-4)$.

5) Zwey Zahlen, die dieselben Zeichen vor sich haben, werden von einander subtrahirt, indem man die Zahlen, unabgesehen auf ihre Zeichen, von einander subtrahirt, der Differenz aber dasselbe Zeichen vorsetzt.

Z. B. $(-a)-(-c)=-(a-c)$; $(-7)-(-4)=-(7-4)$.

6) Zwey Zahlen, die verschiedene Zeichen haben, werden von einander subtrahirt, wenn man die Zahlen, unabgesehen auf ihre Zeichen, addirt, und der Summe das Zeichen des Minuenden vorsetzt. Z. B. $a-(-b)=a+b$; $(-a)-b=-(a+b)$ $4-(-7)=4+7$; $(-4)-7=-(4+7)$.

Diese Regeln geben, wie man sieht, Resultate, die mit den (§. 27.) aufgestellten übereinstimmen; und können deshalb, als solche, benützt werden.

§. 28. Nach (§. 16. Anmerk. und §. 27.) ist:

$$(a+b)-c=(b+a)-c=(a-c)+b$$
$$=[(-c)+a]+b=(b-c)+a$$
$$=[(-c)+b]+a.$$

und

und nach (§. 18.):

$$(a-b)-c=(a-c)-b=[(-b)+a]-c$$
$$[(-c)+a]-b=[(-b)-c]+a$$
$$=[(-c)-b]+a.$$

Nimmt man nun ein für allemal an, daß in einem, aus mehrern Bildern durch Addizion und Subtraktion zusammengesetzten, Ausdruck die Klammern weggelassen werden sollen, so bald selbige bloß anzeigen, daß die einzelnen Zahlbilder in der Ordnung verbunden werden, in der sie bey dem Lesen auf einander folgen; so kann man, bey allen obenstehenden Ausdrücken, die Klammern weglassen (wie man sogleich übersieht) und es erhellet dann zugleich aus obiger Zusammenstellung, daß ein solcher Ausdruck immer dieselbe Zahl bezeichne in welcher Ordnung man auch die einzelnen Zahlbilder neben einander schreibt, wenn man nur bey einem jeden das ihm vorstehende Zeichen unverändert läßt.

Zu §. 28. So bezeichnet z. B. der Ausdruck $5-2+7-8$ die Zahl 2; denn man hat: $5-2=3$, $3+7=10$, und $10-8=2$; dasselbe bezeichnet aber auch der Ausdruck $-8+5+7-2$; denn es ist: $-8+5=-3$, $-3+7=4$ und $4-2=2$; dasselbe bezeichnet endlich auch der Ausdruck $-2-8+5+7$; denn es ist: $-2-8=-10$, $-10+5=-5$ und $-5+7=2$; wie vorher.

Zwey-

## Zweytes Kapitel.

## Von der Multiplikazion und Division unbestimmter Zahlen.

§. 29. Die Zahl c, die durch eine Summe mehrerer gleicher Summanden a+a+a+a+...; (wo die Punkte andeuten, daß die Anzahl der Summanden unbestimmt sey) bezeichnet ist, hängt bloß von der Zahl a und von der Zahl der Summanden, die mit m bezeichnet seyn mag, ab. Man bezeichnet sie deswegen durch das Bild a×m oder a.m und nennt solches das **Produkt der beyden Zahlen** a und m. Man sagt: die Zahl a werde mit der Zahl m **multiplicirt**, wenn man a und m zu dem Bilde (Produkt) a×m oder a.m verbindet. Die Zeichen (×) oder (.) heißen die (Zeichen der Multiplikazion) und werden durch **mal** oder **mit** ausgesprochen. Die Zahl a zur linken desselben (welche multiplicirt wird) heißt der **Multiplikand**; die andere Zahl m (mit welcher man multiplicirt) der **Multiplikator**.

Zu §. 29. Das Bild 7×5 oder 7.5 bezeichnet also dieselbe Zahl, die auch die Summe 7+7+7+7+7 bezeichnet; dabey ist 7 der Multiplikand und 5 der Multiplikator. Das Bild 7×5 oder 7.5 (nicht 35) heißt das Produkt der beyden Zahlen 7 und 5: und man hat 7 mit 5 multiplicirt, sobald man dieses Bild 7.5 oder 7×5 hingesetzt (nicht wenn man das Zahlbild 35 erzeugt) hat.

§. 30. Die Zahl a, die, mit einer Zahl m multiplicirt, ein Produkt giebt, das der Zahl c gleich ist, bezeichnet man durch das Bild $\frac{c}{m}$ oder c:m, und nennt dieses Bild den Quozienten der beyden Zahlen c und m. Verbindet man die Zahlen c und m zu dem Bilde (Quozienten) $\frac{c}{m}$ oder c:m, so sagt man: man dividire die Zahl c durch die Zahl m. Der Querstrich oder das Zeichen (:) heißen Divisionzeichen; die Zahl c oberhalb des ersten oder zur linken des zweyten Divisionzeichen (die dividirt wird) heißt der Dividend; die andere Zahl m (durch welche man dividirt) der Divisor.

Zu §. 30. Gewöhnlich sagt man: man habe die Zahl 35 durch 5 dividirt, wenn man das Zahlbild 7 erzeugt hat, und dieses Zahlbild 7 heißt dann der Quozient der beyden Zahlen 35 und 5. Hier aber heißt nur das Bild $\frac{35}{5}$ oder 35:5 der Quozient der beyden Zahlen 35 und 5; und man hat 35 durch 5 dividirt, sobald man dieses Bild $\frac{35}{5}$ oder 35:5 hingesetzt hat. (Vergl. §. 11. 12.)

§. 31. Jede Summe und jede Differenz, jedes Produkt und jeder Quozient besteht also immer aus zwey Zahlbildern, die selbst einfache oder zusammengesetzte (d. h. Summen, Differenzen, Produkte oder Quozienten) seyn können. Diese zwey Zahlbilder müssen, aus (§. 13.) angegebenen Gründen, erkennbar seyn, und dies geschieht gewöhnlich dadurch, daß man selbige in Klammern einschließt. Doch ist man übereingekommen, wenn die

durch

durch Addizion oder Subtrakzion verbundenen Zahlbilder Produkte oder Quozienten sind, selbige nicht in Klammern einzuschließen. Eben so bedarf es bey einem Quozienten mit dem ersten Divisionzeichen (dem Querstrich), der Klammern nie, um den Dividenden und Divisor, wenn sie zusammengesetzt seyn sollten, erkennbar zu machen; indem dieser Zweck schon dadurch erreicht ist, daß beyde ausserhalb der Linie zu stehen kommen. Aus diesem letztern Grunde ist ein solcher Quozient auch als Multiplikand oder Multiplikator eines Produkts oder als Dividend und Divisor eines Quozienten mit dem Zeichen (:) erkennbar, hat also nicht erst durch Klammern erkennbar gemacht zu werden.

Zu §. 31. So stehet $7 + 4 . 2$ statt der Summe $7 + (4 . 2)$ aber nicht statt des Produkts $(7 + 4) . 2$. So steht $4 . 5 - \frac{8}{2}$ statt der Differenz $(4 . 5) - (\frac{8}{2})$, nicht aber statt des Quozienten $\frac{(4 . 5 - 8)}{2}$ oder $\frac{4 . 5 - 8}{2}$. Endlich steht $\frac{8}{2} . 3$ statt des Produkts $(\frac{8}{2}) . 3$ und nicht statt des Quozienten $\frac{8 . 3}{2}$; eben so $48 : \frac{8}{2}$, statt des Quozienten $48 : (\frac{8}{2})$, nicht aber statt des Quozienten $\frac{48 : 8}{2}$. Man kann hierauf und daher auch auf ein deutliches Schreiben nie genug Acht haben, weil man sonst jeden Augenblick Gefahr läuft, statt eines Zahlenausdrucks einen andern zu erhalten, der eine, von der vorigen ganz verschiedene, Bedeutung hat.

Anmerk. Sind Multiplikand und Multiplikator nicht Ziffern, so pflegt man auch das Multiplikationzeichen ganz wegzulassen, und statt $a . m$ $(a + b) . m$ bloß zu schreiben $a m$ oder $(a + b) m$.

§. 32.

§. 32. Das Produkt am bezeichnet also dieselbe Zahl, die die Summe gleicher Summanden, deren jeder a und deren Anzahl durch m bezeichnet ist, ausdrückt. Eben so bezeichnet der Quozient $\frac{c}{m}$ oder c:m eine Zahl, von der man nichts anders weiß, als daß sie mit m (dem Divisor) multiplicirt den Dividenden c giebt. Hieraus folgt sogleich:

1) $a \cdot 2 = a + a$
$a \cdot 3 = a + a + a$
$a \cdot 4 = a + a + a + a$
$a \cdot m = a + a + a + a \ldots\ldots$

wo die beygefügten Punkte bedeuten, daß der Summanden a so viele genommen werden sollen, als die durch m bezeichnete Zahl anzeigt. Dabey heißt die durch am oder $a + a + a + \ldots\ldots$ bezeichnete Zahl ein Vielfaches von a, und zwar das mfache von a.

2) $1 \cdot m = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots = m$ (E. §. 1.). Daher auch:

3) $\frac{m}{m} = 1$ oder $m : m = 1$

4) $0 \cdot m = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$ daher auch

5) $\frac{0}{m} = 0$ oder $0 : m = 0$

6) Das Produkt $a(m + 1)$ bezeichnet eine Summe, die einen Summanden a mehr hat, als die durch am bezeichnete d. h.

$$a(m + 1) = am + a$$

7) Eben so bezeichnet das Produkt $a(m - 1)$ eine Summe, deren Anzahl der Summanden

um

um 1 kleiner ist, als die der durch am bezeichneten Summe. D. h. es ist:

$$a(m-1) = am - a \quad (\S. 15.)$$

8) Setzt man hier das Bild 2 statt m, so hat man $a(2-1) = a.2 - a$, oder, weil $2-1=1$ und $a.2 - a = (a+a) - a = a$ ist,

$$a.1 = a; \quad \text{demnach}$$

9) $\frac{a}{1} = a$ oder $a:1 = a$.

10) Setzt man in (7)) das Bild 1 statt m, so findet man: $a.(1-1) = a.1 - a$ oder (§. 14. 2) und §. 32. 8)) $a.0 = 0$ folglich auch

11) $\frac{0}{0} = a$ oder $0:0 = a$; d. h. der Quozient $\frac{0}{0}$ oder $0:0$ bezeichnet eine unbestimmte Zahl, wie das Bild a.

12) Das Bild $(m+1)a$ bezeichnet eine Summe, deren Zahl der Summanden a, und bey welcher jeder Summand $m+1$, also um 1 größer ist, als jeder Summand in der durch ma bezeichneten Summe. Die ganze, durch $(m+1)a$ bezeichnete Summe ist also größer, als die durch ma bezeichnete, und zwar um so viele Einheiten, als Summanden vorhanden sind, d. h. um die Zahl a; es ist also:

$$(m+1)a = ma + a.$$

13) Wäre daher für irgend eine bestimmte, durch m bezeichnete, Zahl $ma = am$; so würde dann auch allemal nach (6) und 12)). $(m+1)a = a(m+1)$ seyn; d. h. der

Satz: daß man den Multiplikanden und Multiplikator mit einander verwechseln könne, würde, wenn er für die Zahl m statt fände, dann auch für die nächstgrößere bestimmte Zahl m + 1, und dann natürlich wieder für die, dieser nächstgrößere, Zahl und s. w. für alle folgenden bestimmten Zahlen gelten. Nun ist aber:

$$2a = (§. 14. 4)) = (1 + 1)\,a = (12))\ 1.a + a$$
$$= (2))\ a + a = (1))\ a.2$$

folglich gilt gedachter Satz für die Zahl 2, mithin für die nächstgrößere Zahl 3, dann für die Zahlen 4, 5 ꝛc. und für alle folgenden Zahlen, folglich ist allgemein, wenn b eine beliebige (unbestimmte) Zahl bezeichnet

$$b.a = a.b.$$ (Man vergleiche (§. 14. 5)).

Weil man demnach im Produkt den Multiplikanden und Multiplikator mit einander verwechseln kann, heißen auch beyde ohne Unterschied, die **Faktoren** des Produkts.

Zu 13. Das Produkt 4.3 bezeichnet die Summe 4 + 4 + 4; das Produkt 3.4 dagegen die Summe 3 + 3 + 3 + 3; beyde bezeichnen aber dieselbe Zahl.

14) Jede der drei Gleichungen

$$a.m = c;\ \frac{c}{m} = a \text{ und } \frac{c}{a} = m,$$

drückt ein und dasselbe aus; jede drückt aus, daß a, m, c Zahlen bezeichnen, so daß die beyden ersten a und m mit einander multiplicirt, die dritte Zahl c geben. Statt jeder dieser drei Gleichungen kann also jede der beyden andern gesetzt werden. (Vergl. §. 14. 7)).

15)

15) So oft daher eine dieser drei Gleichungen gegeben ist, kann man immer am statt c, $\frac{c}{m}$ statt a und $\frac{c}{a}$ statt m setzen. Geschieht dieß in gedachten 3 Gleichungen selbst, so erhält man:

1) $am = am$ 2) $\frac{am}{m} = a$ 3) $\frac{am}{a} = m$

4) $\frac{c}{m} . m = c$ 5) $\frac{c}{m} = \frac{c}{m}$ 6) $\frac{c}{c:m} = m$

7) $a . \frac{c}{a} = c$ 8) $\frac{c}{c:a} = a$ 9) $\frac{c}{a} = \frac{c}{a}$

Von diesen 9 Gleichungen drücken die 1te, 5te und 9te gar nichts aus. Dann sind die 2te und 3te, die 4te und 7te, endlich die 6te und 8te nicht wesentlich von einander verschieden; und es lassen sich demnach diese Gleichungen sämmtlich auf folgende drei zurückführen:

I. $\frac{ab}{b} = a$; II) $\frac{a}{b} . b = a$; III. $\frac{a}{a:b} = b$.

Anmerk. Die Regeln, die diese 3 letztern Gleichungen enthalten, sind:

Für die Gleichung I. $\frac{ab}{b} = a$.

1) Ein Produkt ab, durch den einen Faktor b dividirt, giebt den andern Faktor a zum Resultat.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man selbige erstlich mit b multiplicirt, dann das Produkt ab durch dieselbe Zahl b wieder dividirt.

Für die Gleichung II. $\frac{a}{b} . b = a$

1) Ein Quozient $\frac{a}{b}$, mit seinem Divisor b multiplicirt, giebt zum Produkt den Dividenden a.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man selbige zuerst durch eine andere Zahl b dividirt, dann aber den Quozienten $\frac{a}{b}$ wieder mit derselben Zahl b multiplicirt.

Für die Gleichung III. $\frac{a}{a : b} = b$

1) Wenn man mit einem Quozienten $\frac{a}{b}$ in dessen Dividenden a dividirt, so erhält man den Divisor b zum Resultat.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man eine andere Zahl a durch selbige dividirt, und dann nochmals dieselbe Zahl a durch den vorhin erhaltenen Quozienten $\frac{a}{b}$ dividirt.

(Man vergleiche übrigens diesen Paragraphen mit §. 14.)

§. 33. Aus der Definizion der Multiplikation (§. 29.) geht noch hervor:

$$\text{I.} \quad (a + b)\, m = am + bm;$$

denn es ist:

$$(a + b)\, m = (\S.\ 32.\ 1))\ (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots = (\S.\ 14.\ 6))$$
$$(a + a + a + \ldots) + (b + b + b + \ldots) = (\S.\ 32.\ 1))\ am + bm$$

Diese

Diese Gleichung enthält folgende Regeln:

1) Eine Summe $a+b$ wird mit einer Zahl $m$ multiplicirt, wenn man jeden einzelnen Summanden $a$ und $b$ multiplicirt und dann die Produkte $am$ und $bm$ addirt.

2) Zwey Produkte $am$ und $bm$, die einen gemeinschaftlichen Faktor $m$ haben, werden addirt, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $m$ ungeändert läßt, die übrigen $a$ und $b$ aber addirt.

Zu §. 33. So ist z. B. $(4+3)5 = 4.5 + 3.5$; zur linken nehmlich hat man: $4+3 = 7$ und $7.5 = 35$; zur rechten aber: $4.5 = 20$ und $3.5 = 15$ endlich $20+15 = 35$; wie zur linken auch.

Anmerk. Es erhellet sogleich, daß durch mehrmals wiederholte Anwendung dieses Satzes, selbiger auch für eine Summe mehrerer Summanden erweitert werden könne. Man hat nehmlich auch: $(a+b+c).m = am + bm + cm$; u. s. w.

§. 34. Ferner

$$\text{II.} \quad (a-b)m = am - bm;$$

denn man hat: $(a-b)m =$ (§. 32. 1)) $(a-b) + (a-b) + (a-b) + \ldots =$ (§. 21) $(a+a+a+\ldots) - (b+b+b+\ldots)$ $=$ (§. 32. 1)) $am - bm$.

Regeln:

1) Eine Differenz $a-b$ wird mit einer Zahl $m$ multiplicirt, wenn man den Minuenden $a$ und den Subtrahenden $b$ multiplicirt, und letz-

letzteres Produkt b m von ersterm a m subtrahirt.

2) Zwey Produkte a m und b m, die einen gemeinschaftlichen Faktor m haben, werden von einander subtrahirt, wenn man diesen Faktor m beybehält, die andern a und b aber von einander subtrahirt.

Zu §. 34. So ist z. B. $(9-5)\,6 = 9.6 - 5.6$; zur linken nehmlich ist: $9-5=4$ und $4.6=24$; zur rechten aber: $9.6=54$, $5.6=30$ und $54-30=24$.

Anmerk. Wendet man diesen Satz und den (§. 33.) aufgestellten wiederholt an, so erhält man, für einen beliebigen durch Addizion und Subtrakzion zusammengesetzten Ausdruck, z. B. $a-b-c+d$, $(a-b-c+d)m = am-bm-cm+dm$, eben so $(a-b+c+d-e)m = am-bm+cm+dm-em$.

§. 35. Verbindet man die Sätze (§§. 33. u. 34.) mit (§. 32. 13)), so erhält man:

$(a+b)\,m = m(a+b) = am+bm = ma+mb$ und

$(a-b)m = m(a-b) = am-bm = ma-mb$; dahero

1) $m\,(a+b) = ma + mb$

2) $m\,(a-b) = ma - mb$.

§. 36. Endlich:

III. $(ab)\,c = (ac)\,b$;

denn es ist: $(ab)c =$ (§. 32. 1)) $ab+ab+ab+\ldots$ $=$ (§. 33.) $(a+a+a+\ldots)\,b =$ (§. 32. 1)) $(ac)\,b$.

Beyde Regeln vereinigen sich hier in folgender:

Ein

Ein Produkt ab wird mit einer Zahl c multiplicirt, wenn man den einen Faktor a multiplicirt, den andern b aber ungeändert läßt.

Zu §. 36. Es ist z. B. (4 . 3) . 5 = (4 . 5) . 3, zur linken nehmlich: 4 . 3 = 12 und 12 . 5 = 60; zur rechten aber: 4 . 5 = 20 und 20 . 3 = 60.

Anmerk. 1. Nach (§. 32. 13)) ist daher:

$$(ab)c = (ba)c = (ac)b = (ca)b = (§.36.)\ (cb)a = (bc)a = c.(ab) = c(ba) = b(ac) = b(ca) = a(cb) = a(bc).$$

D. h. wenn drei Zahlen a, b, c durch Multiplikazion verbunden werden, so ist es einerlei in welcher Ordnung dieß geschieht; man kann daher hier die Klammern ganz weglassen (§. 13.); und bloß schreiben abc oder bca ꝛc. Es fällt sogleich in die Augen, daß sich dieß, durch mehrfach wiederholte Anwendung desselben Satzes (§. 36), auf eine beliebige Menge von Zahlen erweitern lasse; daß z. B. die Bilder abcde, aecbd, bdcae, daceb etc., alle dieselbe Zahl bezeichnen. Ein solches Produkt, dessen Faktoren wieder Produkte sind, das also durch Multiplikazion mehrerer gegebener Zahlen a, b, c etc. entsteht, kann man auch ein Produkt mehrerer Faktoren nennen; und hat dabey die Regel: Ein Produkt mehrerer Faktoren bezeichnet immer dieselbe Zahl, in welcher Ordnung man auch die Multiplikazion verrichtet.

Anmerk. 2. Es ist daher auch:

$$\frac{abcdg}{acd} = \frac{(acd)(bg)}{(acd)} = (§.\ 32.\ 15)\ I.)\ bg.$$

d. h. ein Produkt mehrerer Faktoren abcdg, durch

durch ein Produkt einiger dieser Faktoren a c d dividirt, giebt das Produkt der übrigen Faktoren b g.

So auch z. B.

$$\frac{4.3.2.5}{2.3} = 4 \cdot 5.$$

§. 37. Durch wiederholte Anwendung der Sätze (§. 33. u. §. 34) ergiebt sich auch noch:

$(a+b)(c+d) =$ (§. 33.) $a(c+d) + b(c+d)$
$=$(§. 35. 1.)) $ac + ad + bc + bd$

und $(a-b)(c-d) =$ (§. 34.) $a(c-d) - b(c-d)$
$=$(§. 35. 2)) $ac - ad - (bc - bd)$
$=$(§. 19.) $ac - ad - bc + bd$; oder

1) $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ und
2) $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$.

Von diesen Gleichungen lehrt uns die erste, wie zwey Summen, die zweyte aber, wie zwey Differenzen mit einander multiplicirt werden.

Zu §. 37. Man hat z. B. $(7-5)(9-6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6 - 5 \cdot 9 + 5 \cdot 6$ zur linken nehmlich: $7-5=2$, $9-6=3$ und $2 \cdot 3 = 6$; zur rechten aber: $7 \cdot 9 = 63$, $7 \cdot 6 = 42$, $5 \cdot 9 = 45$ und $5 \cdot 6 = 30$; dann $63 - 42 = 21$; $21 - 45 = -24$; endlich $-24 + 30 = 6$; wie zur linken.

§. 38. Nach (§. 32.) bezeichnet ein Quozient diejenige Zahl, die, mit dem Divisor desselben multiplicirt, dessen Dividenden giebt. Jeder Ausdruck also, der, mit dem Divisor eines Quozienten multiplicirt, dessen Dividenden giebt, bezeichnet dieselbe Zahl, die der Quozient bezeichnet, ist dem Quozienten gleich. (E. §. 7.).

Will man daher die Richtigkeit einer Gleichung nachweisen, deren eine Seite ein Quozient ist (E. §. 8.), so nehme man den andern Ausdruck (die andere Seite der Gleichung, unbekümmert welches Zahlbild sie ist), und multiplicire ihn mit dem Divisor jenes Quozienten; ergiebt sich dann der Dividend zum Resultat, so ist die gegebene Gleichung richtig. (Vergleiche §. 15.)

Zu §. 38. Wollte man z. B. die Richtigkeit der Gleichung $\frac{24}{3} = 8$ nachweisen: so müßte man bemerken, daß die linke Seite ein Quozient ist. Man nehme daher die rechte Seite 8 und multiplicire selbige mit dem Divisor 3; ergiebt sich nun der Dividend 24, so bezeichnet 8 eine Zahl, die, mit dem Divisor 3 multiplizirt, den Dividenden 24 giebt; und dieselbe Zahl bezeichnet auch der Quozient $\frac{24}{3}$; folglich beyde Ausdrücke einander gleich; die Gleichung richtig.

§. 39. Auf diesem Wege werden wir uns leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$\text{I.}\quad \frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m};$$

denn, da der Ausdruck zur linken ein Quozient ist, (zur rechten eine Summe), so hat man, nach (§. 38.):

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m = (\text{§. 33.})\ \frac{a}{m} \cdot m + \frac{b}{m} \cdot m$$
$$= (\text{§. 32. 15) II.})\ a + b$$

folglich die Richtigkeit der Gleichung (I.) erwiesen.

Regeln:

1) Eine Summe $a + b$ wird durch eine Zahl $m$ dividirt, wenn man jeden einzelnen Summanden $a$ und $b$ dividirt, und die Quozienten $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ addirt.

2) Zwey Quozienten $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$, die einen gemeinschaftlichen Divisor $m$ haben, werden addirt, indem man die Dividenden $a$ und $b$ addirt, den Divisor $m$ aber ungeändert läßt.

Zu §. 39. Es ist z. B. $\frac{12 + 8}{4} = \frac{12}{4} + \frac{8}{4}$; zur linken nehmlich: $12 + 8 = 20$; $\frac{20}{4} = 5$; zur rechten aber $\frac{12}{4} = 3$ und $\frac{8}{4} = 2$; dann $3 + 2 = 5$; wie vorher.

Anmerk. Es erhellet aus (Anmerk. §. 33.), daß sich dieser Satz auch auf eine Summe von drei und mehr Summanden ausdehnen läßt; nehmlich:

$$\frac{a + b + c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}; \text{ u. s. w.}$$

§. 40. Dann:

$$\text{II.} \quad \frac{a - b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m};$$

denn, wegen des Quozienten zur linken (zur rechten hat man eine Differenz), ist:

$$\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right) m = (\text{§. } 34.)\ \frac{a}{m} \cdot m - \frac{b}{m} \cdot m$$

$$= (\text{§. } 32.\ 15)\ \text{II.})\ a - b$$

folglich die Gleichung (II.) richtig.

Regeln:

1) Eine Differenz a — b wird mit einer Zahl m dividirt, wenn man sowohl den Minuenden a als auch den Subtrahenden b dividirt, und letztern Quozienten $\frac{b}{m}$ von erstern $\frac{a}{m}$ subtrahirt.

2) Zwey Quozienten $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$, die einen gemeinschaftlichen Divisor m haben, werden von einander subtrahirt, wenn man ihre Dividenden a und b von einander subtrahirt, den gemeinschaftlichen Divisor m aber ungeändert beybehält.

Zu §. 40. So ist z. B. $\frac{24-18}{3} = \frac{24}{3} - \frac{18}{3}$; zur linken nehmlich: $24 - 18 = 6$; $6 : 3 = 2$; zur rechten aber: $\frac{24}{3} = 8$, $\frac{18}{3} = 6$ und $8 - 6 = 2$, wie zur linken.

Anmerk. Eben so wie (Anmerk. §. 34) folgt auch hier:

$$\frac{a-b+c+d-e}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} - \frac{e}{m}$$

und so für jeden, durch Addizion und Subtrakzion beliebig zusammengesetzten Ausdruck.

§. 41. Ferner:

$$\text{III. } \frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b};$$

denn der Ausdruck zur rechten ist ein Quozient (der zur linken ein Produkt), dahero nach (§. 38.): $\left(\frac{a}{b} \cdot m\right) b =$ (§. 36.) $\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) m =$ (§. 32. 15) II.) am; welches nachzuweisen war.

Re-

Regeln:

1) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl m multiplicirt, wenn man den Dividenden a multiplicirt, den Divisor b aber ungeändert läßt.

a) Ein Produkt am wird durch eine Zahl b dividirt, wenn man den einen Faktor a dividirt, den andern m aber ungeändert läßt.

Zu §. 41. So ist z. B. $\frac{6}{2} \cdot 4 = \frac{6 \cdot 4}{2}$; zur linken nehmlich: $\frac{6}{2} = 3$ und $3 \cdot 4 = 12$; zur rechten aber: $6 \cdot 4 = 24$ und $\frac{24}{2} = 12$; wie zur linken.

§. 42. Auch

$$\text{IV. } \frac{a}{b}\, m = \frac{a}{b : m};$$

denn der Ausdruck zur rechten ist ein Quozient (der zur linken ein Produkt), demnach, zu Folge (§. 38.):

$$\left(\frac{a}{b}\, m\right) \frac{b}{m} = (\text{§. } 36.)\ \left(\frac{b}{m} \cdot m\right) \frac{a}{b}$$

$$= (\text{§. } 32.\ 15)\ \text{II.})\ b \cdot \frac{a}{b} = (\text{ebend.})\ a$$

folglich die Gleichung (IV.) richtig.

Die Regeln dieser Gleichung sind:

1) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl m multiplicirt, wenn man den Dividenden a ungeändert läßt, den Divisor b aber durch diese Zahl m dividirt.

2)

2) Eine Zahl a wird durch einen Quozienten $\frac{b}{m}$ dividirt, wenn man selbige erstlich durch den Minuenden b dividirt, dann aber den erhaltenen Quozienten $\frac{a}{b}$ mit dem Divisor m multiplicirt.

Zu §. 42. Es ist z. B. $\frac{24}{6} \cdot 3 = \frac{24}{6:3}$; zur linken hat man nehmlich: $\frac{24}{6} = 4$ und $4 \cdot 3 = 12$; zur rechten aber: $6 : 3 = 2$ und $\frac{24}{2} = 12$; wie zur linken.

§. 43. Es sind daher alle folgende Ausdrücke einander gleich

$$\frac{a}{b:m} = \frac{a}{b} \cdot m = (\text{§. 41.}) \frac{a\,m}{b} = \frac{m\,a}{b}$$

$$= (\text{§. 41.}) \frac{m}{b} \cdot a = (\text{§. 42.}) \frac{m}{b:a} = m \cdot \frac{a}{b} = a \cdot \frac{m}{b}$$

Von den 28 Gleichungen die man erhält, wenn man immer zwey dieser Ausdrücke durch das Gleichheitzeichen verbindet, wollen wir, ausser den beyden (§. 41. u. §. 42.) aufgeführten, nur noch folgende herausheben:

$$\text{V.} \quad \frac{a}{b}\,m = \frac{m}{b} \cdot a$$

$$\text{VI.} \quad \frac{a}{b:m} = \frac{a\,m}{b}$$

Die beyden Regeln der Gleichung (V.) vereinigen sich in folgender:

Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl m multiplicirt, wenn man diese Zahl m durch den Divisor

visor b dividirt, und dann den so erhaltenen Quozienten $\frac{m}{b}$ mit dem Dividenden a multiplicirt.

Die Gleichung (VI.) aber enthält folgende:

1) Eine Zahl a wird durch einen Quozienten $\frac{b}{m}$ dividirt, wenn man selbige mit dem Divisor m multiplicirt, und das Produkt am dann durch den Dividenden b dividirt.

2) Ein Produkt a m wird durch eine Zahl b dividirt, wenn man erstlich diese Zahl b durch den einen Faktor m, dann aber den andern Faktor a durch diesen Quozienten $\frac{b}{m}$ dividirt.

Zu §. 43. Nach (V.) ist z. B. $\frac{12}{6} . 18 = \frac{18}{6} . 12$; zur linken nehmlich: $\frac{12}{6} = 2$ und $2 . 18 = 36$; zur rechten aber: $\frac{18}{6} = 3$ und $3 . 12 = 36$.

Nach (VI.) dagegen hat man z. B. $\frac{24}{36 : 12} = \frac{24 . 12}{36}$ zur linken nehmlich: $36 : 12 = 3$ und $\frac{24}{3} = 8$; und zur rechten $24 . 12 = 288$ und $\frac{288}{36} = 8$; wie zur linken.

§. 44. Eben so:

$$\text{VII.}\quad \frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b};$$

denn zur linken hat man einen Quozienten (zur rechten desgleichen), dahero (nach §. 38.):

$$\left(\frac{a : m}{b}\right) m = (\text{§.}41.)\ \frac{(a : m)\, m}{b}\ (\text{§.}32.\ 15)\ \text{II.})\ \frac{a}{b}$$

welches zu erweisen war.

Beyde Regeln kommen in folgender überein: Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird durch eine Zahl m dividirt, wenn man den Dividenden a dividirt, den Divisor b aber ungeändert läßt.

Zu §. 44. Es ist z. B. $\frac{48}{6} : 2 = \frac{48 : 2}{6}$; zur linken nehmlich: $\frac{48}{6} = 8$ und $8 : 2 = 4$; zur rechten aber: $48 : 2 = 24$ und $\frac{24}{6} = 4$; wie zur linken.

§. 45. Ferner:

$$\text{VIII.} \quad \frac{a}{b} : m = \frac{a}{b\,m};$$

denn, wegen des Quozienten zur linken, (der Ausdruck zur rechten ist auch ein Quozient), hat man, nach (§. 38.):

$$\left(\frac{a}{b\,m}\right) m = (\text{§. 42.})\ \frac{a}{(b\,m) : m} = (\text{§. 32. 15) I.})\ \frac{a}{b}$$

welches nachzuweisen war.

Regeln:

1) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird durch eine Zahl m dividirt, wenn man den Dividenden a ungeändert läßt, den Divisor b aber mit m multiplizirt.

2) Eine Zahl a wird durch ein Produkt b m dividirt, wenn man selbige erstlich durch den einen Faktor b, dann den sich ergebenden Quozienten $\frac{a}{b}$ noch durch den andern Faktor m dividirt.

Zu

Zu §. 45. So ist z. B. $\frac{48}{6} : 2 = \frac{48}{6 \cdot 2}$; zur linken nehmlich: $\frac{48}{6} = 8$ und $8 : 2 = 4$; zur rechten aber: $6 \cdot 2 = 12$ und $\frac{48}{12} = 4$.

§. 46. Ferner:

$$\text{IX.} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd};$$

denn, wegen des Quozienten zur rechten (der Ausdrück zur linken ist eine Summe), hat man:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) bd = (\text{§. 33.})\ \frac{a}{b} \cdot bd + \frac{c}{d} \cdot bd$$

$$= (\text{§. 36. und §. 32. 15) II.})\ ad + bc.$$

folglich die Gleichung (IX.) richtig, nach (§. 38.).

Diese Gleichung lehrt, wie man zwey Quozienten addirt. Setzt man in ihr 1 statt b, so erhält man:

$$\frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{ad + 1 \cdot c}{1 \cdot d} \text{ oder nach (§. 32. 2) u. 9))}$$

$$\text{X.} \quad a + \frac{c}{d} = \frac{ad + c}{d}$$

und diese Gleichung lehrt uns, wie man eine Zahl a und einen Quozienten $\frac{c}{d}$ addire.

Zu §. 46. Es ist z. B. nach (IX.) $\frac{12}{3} + \frac{10}{5} = \frac{12 \cdot 5 + 3 \cdot 10}{3 \cdot 5}$ zur linken nehmlich: $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{10}{5} = 2$ und $4 + 2 = 6$; zur rechten aber: $12 \cdot 5 = 60$, $3 \cdot 10 = 30$, $60 + 30 = 90$, dann $3 \cdot 5 = 15$ und $\frac{90}{15} = 6$; wie zur linken.

Nach (X.) aber ist: $7 + \frac{6}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 6}{3}$; nehmlich zur linken: $\frac{6}{3} = 2$ und $7 + 2 = 9$; und zur rech-

rechten: $7 \cdot 3 = 21$, $21 + 6 = 27$, endlich $\frac{27}{3} = 9$.

§. 47. Eben so:

$$\text{XI.} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Diese Gleichung lehrt uns, wie man zwey Quozienten von einander subtrahirt; wird übrigens vollkommen so, wie (IX. §. 46.) erwiesen, indem man hier den Satz (§. 34.), statt dort (§. 33.), zu Hülfe nimmt.

Setzt man in dieser das Bild 1 statt b, und nachher 1 statt d, so erhält man:

$$\frac{a}{1} - \frac{c}{d} = \frac{ad - 1.c}{1.d} \text{ und } \frac{a}{b} - \frac{c}{1} = \frac{a.1 - bc}{b.1}$$

oder $\text{XII.} \quad a - \frac{c}{d} = \frac{ad - c}{d}$ und

$$\text{XIII.} \quad \frac{a}{b} - c = \frac{a - bc}{b} \text{ (§. 32. 2) u. 9)),}$$

welche beyden Gleichungen uns lehren, wie man ein einfaches Zahlbild und einen Quozienten von einander subtrahirt.

Zu §. 47. So ist z. B. nach (XI.) $\frac{10}{2} - \frac{12}{4} = \frac{10.4 - 2.12}{2.4}$; nehmlich zur linken: $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{12}{4} = 3$ und $5 - 3 = 2$; zur rechten aber: $10.4 = 40$, $2.12 = 24$, $40 - 24 = 16$, dann $2.4 = 8$ und $\frac{16}{8} = 2$ wie zur linken auch. Nach (XII.) dagegen ist z. B. $6 - \frac{10}{5} = \frac{6.5 - 10}{5}$; nehmlich zur linken: $\frac{10}{5} = 2$ und $6 - 2 = 4$; und zur rechten: $6.5 = 30$, $30 - 10 = 20$ und $\frac{20}{5} = 4$.

Endlich ist nach (XIII.) $\frac{24}{3} - 6 = \frac{24 - 3.6}{3}$; zur linken nehmlich: $\frac{24}{3} = 8$ und $8 - 6 = 2$; und zur rechten: $3.6 = 18$, $24 - 18 = 6$; endlich $\frac{6}{3} = 2$; wie zur linken.

§. 48. Ferner:

$$\text{XIV.} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d};$$

denn der Ausdruck zur rechten ist ein Quozient, (der zur linken ein Produkt), mithin, nach (§. 38.):

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) b\,d = (\S.\ 36.) \left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot d\right)$$

$= (\S.\ 32.\ 15)\ \text{II.})\ a.\ c.$

demnach die Gleichung (XIV.) richtig.

Regeln:

1) Zwey Quozienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ werden mit einander multiplizirt, wenn man die Dividenden a und c, dann auch die Divisoren b und d mit einander multiplizirt, und ersteres Produkt ac durch letzteres bd dividirt.

2) Zwey Produkte ac und bd werden durch einander dividirt, wenn man die einzelnen Faktoren a und b, dann c und d, durch einander dividirt, und die so erhaltenen Quozienten $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit einander multiplizirt.

Zu §. 48. Es ist z. B. $\frac{15}{3} \cdot \frac{8}{4} = \frac{15 \cdot 8}{3 \cdot 4}$: nehmlich zur linken: $\frac{15}{3} = 5$, $\frac{8}{4} = 2$ und $5 \cdot 2 = 10$; zur rechten

ten dagegen: $15 \cdot 8 = 120$, $3 \cdot 4 = 12$ und $\frac{120}{12} = 10$.

§. 49. Eben so:

$$\text{XV.} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$$

denn, wegen des Quozienten zur linken (der Ausdruck zur rechten ist auch ein Quozient), hat man, nach (§. 38.):

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = (\text{§. 48.})\ \frac{adc}{bcd} = (\text{§. 48.})\ \frac{a}{b} \cdot \frac{dc}{cd}$$

$$= (\text{§. 32. 3) 8) u. 13))}\ \frac{a}{b}$$

folglich die Richtigkeit der Gleichung (XV.), die uns lehrt, wie man einen Quozienten $\frac{a}{b}$ durch einen andern $\frac{c}{d}$ dividirt, nachgewiesen.

Zu §. 49. So ist z. B. $\frac{48}{6} : \frac{12}{3} = \frac{48 \cdot 3}{6 \cdot 12}$; zur linken nehmlich ist: $\frac{48}{6} = 8$, $\frac{12}{3} = 4$ und $8 : 4 = 2$; zur rechten dagegen: $48 \cdot 3 = 144$; $6 \cdot 12 = 72$ endlich $144 : 72 = 2$; wie zur linken auch.

§. 50. Es sind daher alle folgende Ausdrükke einander gleich:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (\text{§. 49.})\ \frac{ad}{bc} = (\text{§. 48.})\ \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{cb}$$

$$= (\text{§. 49.})\ \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{da}{bc} = \frac{d}{b} \cdot \frac{a}{c}$$

$$= \frac{d}{b} : \frac{c}{a} = \frac{da}{cb} = \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{d}{c} : \frac{b}{a}$$

Von den 66 Gleichungen, die man erhält, wenn man immer zwey dieser Ausdrücke durch das Gleichheitzeichen verbindet, wollen wir, ausser den beyden (§. 48. und §. 49.) aufgestellten, nur noch folgende ausheben:

$$\text{XVI.}\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \text{und}$$

$$\text{XVII.}\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$$

Regel:

Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird durch einen andern Quozienten $\frac{c}{d}$ dividirt, (nach XVI.), wenn man den letztern umkehrt, und den erstern $\frac{a}{b}$ mit dem durch Umkehrung erhaltenen Quozienten $\frac{d}{c}$ multiplizirt; (nach XVII.) aber, wenn man die Dividenden a und c, dann auch die Divisoren b und d durch einander, und zuletzt noch den erstern Quozienten $\frac{a}{c}$ durch den letztern $\frac{b}{d}$ dividirt.

Zu §. 50. Nach (XVII.) hat man z. B. $\frac{48}{8} : \frac{12}{4} = \frac{48 : 12}{8 : 4}$ zur linken nehmlich ist: $\frac{48}{8} = 6$, $\frac{12}{4} = 3$ u. $6 : 3 = 2$; zur rechten dagegen: $48 : 12 = 4$ und $8 : 4 = 2$ dann $4 : 2 = 2$; wie zur linken.

§. 51. Ferner:

$$\text{XVIII.}\quad \frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a}{b};$$

denn,

denn, wegen des Quozienten zur linken (der Ausdruck zur rechten ist ebenfalls ein Quozient), ergiebt sich (nach §. 38.):

$$\frac{a}{b} . bm = (§. 36. u. §. 32. 15) II.) am$$

welches nachzuweisen war.

Regeln:

1) Zwey Produkte am und bm, die einen gemeinschaftlichen Faktor m haben, werden durch einander dividirt, wenn man den Faktor m gegenseitig wegläßt, und nur die andern Faktoren a und b durch einander dividirt.

2) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ bleibt unverändert, wenn man dessen Dividenden a und Divisor b mit einer und derselben Zahl m multiplizirt.

Zu §. 51. So ist z. B. $\frac{6 . 4}{2 . 4} = \frac{6}{2}$, nehmlich

$$\frac{24}{8} = \frac{6}{2} = 3.$$

Anmerk. Dahero ist auch

$$\frac{abcde}{gbdm} = \frac{(ace)(bd)}{(gm)(bd)} = \frac{ace}{gm}; \text{ d. h.}$$

ein Quozient, dessen Dividend und Divisor Produkte mehrerer Faktoren sind, bleibt unverändert, wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren b und d gegenseitig wegläßt. So ist z. B. auch:

$$\frac{2.3.5.8}{2.5.4} = \frac{3.8}{4}.$$

§. 52.

§. 52. Endlich:

$$\text{XIX.}\quad \frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{b};$$

denn, wegen des Quozienten zur linken, ist, nach (§. 38.):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{m} = (\S.48.)\ \frac{ab}{bm} = (\S.51.)\ \frac{a}{m}.$$

Regeln:

1) Zwey Quozienten $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$, die einen gemeinschaftlichen Divisor m haben, werden durch einander dividirt, indem man ihre Dividenden a und b durch einander dividirt, den gemeinschaftlichen Divisor m aber gegenseitig wegläßt.

2) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ bleibt unverändert, wenn man den Dividenden a und Divisor b mit einer und derselben Zahl m dividirt.

Zu §. 52. So ist z. B. $\frac{48 : 6}{24 : 6} = \frac{48}{24}$; zur linken: $48 : 6 = 8$, $24 : 6 = 4$ und $8 : 4 = 2$, zur rechten aber: $48 : 24 = 2$; wie vorher.

§. 53. Da die vorstehenden Sätze des 1ten und dieses Kapitels ohne Rücksicht auf bestimmte Zahlen entwickelt wurden, so drücken sie nur das Verhältniß der Verbindung-Arten (Operazionen) zu einander aus, unabhängig von jeder bestimmten Zahl. Indessen bezeichnet nicht jeder Quozient $\frac{a}{b}$ eine Zahl, indem a ein Vielfaches von b seyn muß (§. 32.

(§. 32. 1) und §. 30.) und dies nicht immer der Fall ist; und es scheinen daher gedachte Sätze doch nicht so ganz unabhängig von den bestimmten Zahlen zu gelten, da keine Quozienten vorkommen dürfen, bey denen der Dividend kein Vielfaches des Divisors ist. Bedenkt man aber, daß ein solcher Quozient $\frac{a}{b}$, wenn er keine Zahl mehr bezeichnet, gar keine Bedeutung hat, so erhellet, daß man ihm eine Bedeutung geben könne; und diese giebt man ihm dadurch, daß man alle Sätze, die für Quozienten $\frac{a}{b}$ gelten, in so ferne sie eine Zahl bezeichnen, auch für das Bild $\frac{a}{b}$, welches nur die Form eines Quozienten hat, gelten läßt. Unter dieser Voraussetzung gelten alle vorstehende Sätze was für Zahlen nur immer an die Stelle der Buchstaben gesetzt werden. (Man vergl. §. 24.).

Zu §. 53. Was bedeutet also der Quozient $\frac{3}{4}$? Nichts; denn er sollte ein Zahlbild seyn, bezeichnet aber keine Zahl; indem es keine giebt, die mit 4 multiplicirt, die Zahl 3 erzeugte. Allein in der Voraussetzung, daß man alle Sätze der Quozienten auch für diesen gelten lassen wolle, hat man nach (§. 32. 15) II,): $\frac{3}{4}.4 = 3$ und nach (§. 41.): $\frac{3}{4}.8 = \frac{3.8}{4} = \frac{24}{4} = 6$ u. s. w.; d. h. in dieser Voraussetzung ist $\frac{3}{4}$ ein Bild, welches zwar keine Zahl bezeichnet, aber doch in Verbindung mit andern Zahlbildern, ein Zahlbild wieder hervorbringt, und zu richtigen Resultaten führt. Was übrigens in der (Note zu §. 24.) über die Beybehaltung von dergleichen Formen, und über die Verschiedenheit oder Uebereinstimmung ihrer aus den verschie-

denn

denen Sätzen hervorgehenden Bedeutungen gesagt wurde, gilt auch hier und darf bloß wiederholt werden.

§. 54. Unter der Voraussetzung des vorhergehenden Paragraphen arbeitet man also mit den Bildern fort, unbekümmert um ihre Bedeutung, überzeugt, daß die hervorgehenden Resultate 1) wenn die Ausdrücke Zahlen bezeichnen, immer eben so richtig sind, als wenn man sie mit ängstlicher Sorgfalt ohne Beybehaltung von dergleichen Formen entwickelt hätte; 2) wenn die in ihnen enthaltenen Bilder noch immer keine Zahlen bezeichneten, gedachte Resultate dennoch mit andern Zahlbildern nach denselben Sätzen so verbunden, daß endlich wirkliche Zahlbilder entstehen, eine gleiche Richtigkeit und Wahrheit gewähren.

Einen solchen Quozienten wie $\frac{a}{b}$, wo a kein Vielfaches von b ist, der keine Zahl bezeichnet, also nur die Form eines Quozienten hat, nennt man eine gebrochene Zahl (einen Bruch) und im Gegensatz dieser gebrochenen Zahlen, die wirklichen Zählbilder ganze Zahlen. Dabei heißt der Dividend a der Zähler, der Divisor b aber der Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$. Der Bruch $\frac{a}{b}$ selbst heißt ein eigentlicher, echter Bruch, wenn $a < b$, ein uneigentlicher, unechter, wenn $a > b$ ist.

Anmerk. Was in den vorhergehenden (§§.) von den Quozienten geltend gemacht wurde, (worunter auch die, die Addizion, Subtrakzion, Multiplikazion und Division der Quozienten betreffenden

Sätze

Sätze enthalten sind), gilt demnach auch von den Brüchen, und man kann die wörtlich ausgedrückten Regeln noch besonders für Brüche umändern, wenn man in ihnen überall statt: Quozient, Dividend und Divisor, resp. die Worte: Bruch, Zähler und Nenner substituirt.

§. 55. Setzt man in (§. 34. §. 35. 2) §. 37. 2) §. 40.) das Bild o statt a und statt c, so erhält man nach (§. 26. §. 32. 4) 10) und 5)), für negative Zahlen:

1) $(-b) . m = - bm$

2) $m . (-b) = - mb$;

3) $(-b) . (-d) = bd$

4) $\frac{-b}{m} = - \frac{b}{m}$.

Dann ist aber auch noch nach (§. 38.):

5) $\frac{b}{-m} = - \frac{b}{m}$ und

6) $\frac{-b}{-m} = \frac{b}{m}$.

Da nehmlich die Ausdrücke zur linken Quozienten sind (in 5 ist der Ausdruck zur rechten eine Differenz), so hat man für 5):

$(-\frac{b}{m}) (-m) = (3)\ \frac{b}{m} . m = (§. 32. 15)$
II.) b und für (6):

$\frac{b}{m} . (-m) = (2) - \frac{b}{m} . m = - b.$

weswegen nach (§. 38.) jene Gleichungen richtig sind.

Mit

Mit Zuziehung der (Anmerk. §. 27.) kann man die in den Gleichungen (1 bis 6) enthaltenen Regeln, auf folgende Art wörtlich ausdrücken:

Positive und negative Zahlen werden mit einander multiplizirt und dividirt, wenn man die Zahlen, unabgesehen auf ihre Zeichen, mit einander multiplizirt und dividirt und dem Resultat

1) das Zeichen (+) vorsetzt (oder kein Zeichen) wenn beyde gegebene Zahlen positiv oder beyde negativ waren.

2) Das Zeichen (—) vorsetzt, wenn von den beyden gegebenen Zahlen die eine positiv, die andere aber negativ war.

Zu §. 55. Diesen Regeln zu Folge hat man:

z. B. $(-4)(-3) = 12$; $\frac{-12}{-3} = 4$; $4.3 = 12$;

$\frac{12}{4} = 3$; $(-4).3 = -12$; $4(-3) = -12$;

$\frac{-12}{3} = -4$; $\frac{12}{-3} = -4$.

## Drittes Kapitel.

## Von der Potenzirung, Radikazion und Logarithmazion unbestimmter Zahlen.

§. 56. Die Zahl c, die durch ein Produkt mehrerer gleicher Faktoren a.a.a...... (wo die Punkte andeuten, daß die Anzahl derselben unbestimmt sey) bezeichnet ist, hängt von zwey Zahlen ab, nehmlich von der Zahl a und von der Anzahl der Faktoren, die durch m bezeichnet seyn mag. Man bezeichnet ein solches Produkt kurz durch $a^m$ (indem man die Zahl m ohne alles Zeichen neben die Zahl a, doch oberhalb der Linie hinsetzt), und nennt dieses Bild die Potenz (Dignität) der beyden Zahlen a und m (auch eine Potenz von a, auch die mte Potenz von a). Man sagt: die Zahl a werde mit der Zahl m potenzirt (oder auf die mte Potenz erhoben), wenn man a und m zur Potenz $a^m$ verbindet. Die Zahl a (welche potenzirt wird) heiße der Dignand, die Zahl m (mit welcher man potenzirt) der Exponent.

§. 57. Die Zahl a, die, mit einer Zahl m potenzirt, eine der Zahl c gleiche, Potenz giebt, bezeichnet man durch $\sqrt[m]{c}$, und nennt dieses Bild die Wurzel der beyden Zahlen c und m (auch die mte Wurzel aus c). Man sagt: die

die Zahl c werde durch die Zahl m radizirt (oder es werde die m te Wurzel aus c gezogen), wenn man die beyden Zahlen c und m zum Bilde (Wurzel) $\sqrt[m]{c}$ verbindet. Das Zeichen ($\sqrt{}$) heißt deswegen das Zeichen der Radikazion (Wurzelzeichen); die Zahl c (welche radizirt wird) der Radikand, die Zahl m aber (durch welche man radizirt) der Wurzel-Exponent.

§. 58. Die Zahl m, mit welcher eine Zahl a potenzirt werden muß, um eine der Zahl c gleiche Potenz zu geben, bezeichnet man durch das Bild c?a, und nennt dieses Bild den Logarithmen der beyden Zahlen c und a. Verbindet man c und a zu dem Bilde (Logarithmen) c?a, so sagt man: man logarithmire die Zahl c durch die Zahl a. Das Zeichen (?) heißt deswegen das Zeichen der Logarithmazion (Logarithmenzeichen); die Zahl c (die logarithmirt wird) heißt der Logarithmand, die andere Zahl a dagegen (durch welche man logarithmirt) die Basis *).

Man-

*) Ich wollte anfänglich statt der Worte: Exponent, Wurzelexponent und Basis, setzen resp. Dignator, Radikator, und Logarithmator. Da ich mich aber überzeugte, daß man keine neuen Benennungen einführen müsse, wo solche nicht sehr nothwendig sind, so ließ ich es bey dem Dignanden, Radikanden und Logarithmanden, die ich aus Ermangelung schon gebräuchlicher Worte einführen mußte, beruhen.

Man vergleiche mit (§§. 56. 57. und 58.) die (§§. 11. 12. 29. und 30.).

Zu §§. 56 — 58. Es mag hier dienlich seyn, folgende Uebersicht zu geben. Die Zahl 5 hängt von den beyden Zahlen 2 und 3 auf eine Art ab, die man Addizion nennet: die Zahl 6 aber von denselben Zahlen 2 und 3 auf eine Art ab, die Multiplikazion heißt: und die Zahl 8 auf eine Art, die man Potenziren nennt. Wir drücken dies bildlich aus, indem wir schreiben

$$2 + 3 = 5,\ 2 . 3 = 2 + 2 + 2 = 6 \text{ und } 2^3 = 2 . 2 . 2 = 8.$$

Geht man nun zurück, so hängt die Zahl 2 auch auf eine eigene Art von 5 und 3, auf eine eigene Art von 6 und 3, und auf eine eigene Art auch von den beyden Zahlen 8 und 3 ab; die erste Art der Abhängigkeit nennt man die Subtrakzion, die zweyte die Division, die dritte die Radikazion; und man drückt dies bildlich aus durch

$$5 - 3 = 2;\ 6 : 3 = 2 \text{ und } \sqrt[3]{8} = 2.$$

Dann aber hängt eben so auch die Zahl 3, von den beyden Zahlen 5 und 2, dann von den Zahlen 6 und 2, und endlich auch von den Zahlen 8 und 2 ab. Die erste Art der Abhängigkeit ist die vorhinangeführte Subtrakzion, weil $2 + 3 = 3 + 2$ (§. 14. 5)), d. h. weil die beyden Zahlen 2 und 3 zur Erzeugung der Zahl 5 gleichmäßig beytragen, jede also von der erzeugten Zahl 5 und der andern erzeugenden auf eine und dieselbe Art abhängen muß. Die zweyte Art der Abhängigkeit ist die eben schon erwähnte Division, weil $2 . 3 = 3 . 2$ ist (§. 32. 13)): also aus demselben Grunde, wie vorher. Endlich ist die dritte Art der Abhängigkeit die Logarithmazion, und sie ist wesentlich von der Radikazion verschieden, weil nicht $2^3 = 3^2$; d. h. weil die beyden Zahlen 2 und 3

nicht

nicht gleichmäßig, sondern auf verschiedene Art zur Erzeugung der Zahl 8 beytragen, weil also auch jede der erzeugenden auf verschiedene Art von der erzeugten und der andern erzeugenden Zahl abhängen muß. Wir drücken dieß bildlich aus durch

$$5 - 2 = 3, \quad 6 : 2 = 3 \text{ und } 8 ? 2 = 3.$$

So wie wir nun (§§. 11. u. 12, 29. u. 30.) die Bilder $2 + 3$, $2 . 3$, (nicht aber 5, 6), dann die Bilder $5 - 2$, $5 - 3$, $6 : 2$, $6 : 3$ (nicht aber 3 und 2) Summe, Differenz, Produkt und Quozient nannten, eben so heißen auch hier die Bilder $2^3$, $\sqrt[3]{8}$ und $8 ? 2$, (nicht aber die Bilder 8, 2 und 3, welche jenen respective gleich sind) Potenz, Wurzel und Logarithme.

§. 59. Jede Summe, Differenz, Produkt, Quozient, jede Potenz, Wurzel und jeder Logarithme besteht also immer aus zwey Zahlbildern, die selbst einfach oder zusammengesetzt (d. h. Summen, Differenzen, Produkte, Quozienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen) seyn können. Diese beyden Zahlbilder müssen immer erkennbar seyn (nach §. 13.), und werden gewöhnlich durch Klammern erkennbar gemacht. Doch ist man übereingekommen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nicht einzuklammern, wenn sie zu einander addirt oder von einander subtrahirt, auch nicht die Potenzen und Wurzeln, wenn sie mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen. Ferner ist es nicht nöthig, den Exponenten der Potenz und den Wurzelexponenten durch Klammern anzudeuten, da diese sich daran schon erkennen lassen, auch wenn sie zusammengesetzt sind, daß sie oberhalb der Linie stehen. Endlich pflegt man den Radikanden auch öfters bloß durch einen

einen Querstrich, der sich vom Wurzelzeichen aus über selbigen erstreckt, anzudeuten.

Jeder aus einer beliebigen Menge einfacher Zahlbilder durch vorstehende Operazionen noch so zusammengesetzte Ausdruck ist daher immer eines von den 7 Zahlbildern, (Summe, Differenz ꝛc. ꝛc., Wurzel, Logarithme) und besteht, als solches, immer bloß aus zwey Zahlbildern, von deren jedem dann wieder dasselbe gilt (wenn sie nehmlich auch noch zusammengesetzt sind), was so eben von dem ursprünglichen Bilde gesagt wurde.

Zu §. 59. Es steht daher das Bild $2^3 + 5^3$ statt der Summe $(2^3) + (5^3)$; $4^{2+3}$ statt der Potenz $4^{(2+3)}$ nicht aber statt der Summe $(4^2) + 3$; das Bild $\sqrt[3]{8^2}$ statt der Wurzel $\sqrt[3]{}\,(8^2)$; und $(\sqrt[3]{}\,8)^2$ ist eine Potenz, deren Dignand das Bild $(\sqrt[3]{}\,8)$ ist. Das Bild $(5+3)?2$ ist ein Logarithme, dessen Logarithmand $5+3$ und dessen Basis 2 ist. Dagegen ist $5+3?2$ eine Summe wo die Bilder 5 und $3?2$ die Summanden sind.

Das Bild $ab?c$ kann eben so gut den Logarithmen $(ab)?c$, als auch das Produkt $a(b?c)$ ausdrücken, weswegen man ein solches Bild nie ohne Klammern hinsetzen darf, um nicht Unbestimmtheit und Ungewißheit in den Untersuchungen zu erhalten. Ferner ist $\sqrt[3]{8+2}$ eine Wurzel, statt $\sqrt[3]{}\,(8+2)$; dagegen das Bild $\sqrt[3]{}\,8+2$ eine Summe, die statt $(\sqrt[3]{}\,8)+2$ steht. Eben so steht $a\,b_m$ nicht statt der Potenz $(ab)^m$, sondern statt des Produkts $a.(b^m)$; das Bild $\sqrt[m]{}\,b.c$ nicht statt der Wurzel $\sqrt[m]{}\,(b.c)$, sondern statt des Produkts $(\sqrt[m]{}\,b)c$ u. s. w.

Da

Da dieß so sehr wichtig ist, und von einer bestimmten Bezeichnung auch die Bestimmtheit der Begriffe abhängt, so wiederhole ich, was (§. 13.) schon gesagt wurde, daß man die beyden Zahlbilder, aus denen ein gegebener Ausdruck besteht (wenn sie zusammengesetzt sind), immer durch Klammern erkennbar machen müsse, und daß man dieß nur dann unterlassen dürfe, 1) wann erwiesen ist, daß der Ausdruck ohne Klammern, wie man ihn auch nehme, doch immer dieselbe Zahl bezeichne 2) wenn durch Uebereinkunft oder andere Hilfsmittel die Zweydeutigkeit der ohne Klammern geschriebenen Bilder vermieden wird.

§. 60. Die Potenz $a^m$ bezeichnet also dieselbe Zahl, die auch das Produkt gleicher Faktoren, wo jeder a, und deren Anzahl durch m bezeichnet ist, ausdrückt. Eben so bezeichnet die Wurzel $\sqrt[m]{c}$ eine Zahl, von der man nichts anders weiß, als daß sie, mit der Zahl m (dem Wurzelexponenten) potenzirt, den Radikanden c giebt. Endlich bezeichnet der Logarithme c?a eine Zahl, welche, wenn man die Basis a mit ihr potenzirt, den Logarithmanden c giebt. Hieraus folgt sogleich:

1) $a^2 = a . a$
$a^3 = a . a . a$
$a^4 = a . a . a . a$
$a^m = a . a . a . . . . . .$; wo die Punkte andeuten daß der Faktoren so viele genommen werden sollen, als die durch m bezeichnete Zahl bestimmt.

2) $1^m = 1 . 1 . 1 . . . . . 1 = 1$; demnach

3) $\sqrt[m]{1} = 1$ und 1?1 = m; d. h. das Bild

1?1

$1 ? 1$ bezeichnet eine unbestimmte Zahl, wie auch der Buchstabe m. (Man sehe §. 32. 10)).

4) $0^m = 0.0.0.... = 0$; folglich

5) $\sqrt[m]{0} = 0$ und $0 ? 0 = m$; d. h. das Bild $0 ? 0$ bezeichnet ebenfals jede unbestimmte Zahl.

6) Die Potenz $a^{m+1}$ bezeichnet ein Produkt, welches einen Faktor mehr hat, als das durch $a^m$ bezeichnet; d. h. $a^{m+1} = a^m . a$; daher auch (§. 38.):

7) $\frac{a^{m+1}}{a^m} = a$ und $\frac{a^{m+1}}{a} = a^m$.

8) Eben so bezeichnet die Potenz $a^{m-1}$ ein Produkt, das einen Faktor weniger hat, als das durch $a^m$ bezeichnete, d. h.

$$a^{m-1} . a = a^m \text{; folglich}$$

9) $\frac{a^m}{a^{m-1}} = a$ und $\frac{a^m}{a} = a^{m-1}$.

10) Setzt man in der letzten Gleichung das Bild 2 statt m, so hat man $\frac{a^2}{a} = a^{2-1}$, oder, da $\frac{a^2}{a} = \frac{a.a}{a} = a$, und $2 - 1 = 1$ ist:

$$a = a^1 \text{ oder } a^1 = a \text{; demnach}$$

11) $\sqrt[1]{a} = a$ und $a ? a = 1$.

12) Setzt man aber in der letzten Gleichung (9.) das Bild 1 statt a, so ist: $\frac{a^1}{a} = a^{1-1}$, oder, da $\frac{a^1}{a} = \frac{a}{a} = 1$ und $1 - 1 = 0$ ist:

$1 = a^0$ oder $a^0 = 1$; dann aber auch:

13) $\sqrt[0]{1} = a$ und $1 ? a = 0$.

14) Jede der drei Gleichungen

$$a^m = c, \quad \sqrt[m]{c} = a \text{ und } c ? a = m$$

drückt ein und dasselbe aus; jede drückt aus, daß a, m, c Zahlen bezeichnen, so daß die Zahl a, mit der Zahl m potenzirt, die Zahl c giebt.

Statt jeder dieser 3 Gleichungen kann also jede der beyden andern gesetzt werden. (Vgl. §. 14. 7) und §. 32. 14)).

15) So oft daher eine dieser 3 Gleichungen gegeben ist, kann man immer $a^m$ statt c, $\sqrt[m]{c}$ statt a, und $c ? a$ statt m setzen. Geschieht dieß in den 3 Gleichungen selbst, so erhält man:

$$1)\ a^m = a^m \quad 2)\ \sqrt[m]{(a^m)} = a, \quad 3)\ (a^m) ? a = m$$

$$4)\ (\sqrt[m]{c})^m = c \quad 5)\ \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{c} \quad 6)\ c ? (\sqrt[m]{c}) = m$$

$$7)\ a^{c ? a} = c \quad 8)\ \sqrt[c ? a]{c} = a \quad 9)\ c ? a = c ? a.$$

Von diesen 9 Gleichungen drücken die 1te, 5te und 9te gar nichts aus. Die übrigen aber können in folgender Ordnung geschrieben werden:

$$\text{I. } \sqrt[b]{(a^b)} = a \qquad \text{II. } (\sqrt[b]{a})^b = a$$

$$\text{III. } a^b ? a = b \qquad \text{IV. } a^{b ? a} = b$$

$$\text{V. } \sqrt[a ? b]{a} = b \qquad \text{VI. } a ? \sqrt[b]{a} = b$$

und von diesen Gleichungen drücken die ersten bey-

beyden den Gegensatz des Potenzirens und Radizirens, die nächsten zwey, den des Potenzirens und Logarithmirens, und die letzten beyden den Gegensatz des Radizirens und Logarithmirens aus. (Vergl. §. 14. 8) und §. 32. 15)).

Anmerk. Die Regeln, die diese 6 Gleichungen enthalten, sind:

Für die Gleichung I. $\sqrt[b]{(a^b)} = a.$

1) Wenn man eine Potenz $a^b$ durch ihren Exponenten b radizirt, so erhält man zum Resultat den Dignanden a.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man selbige erstlich mit einer Zahl b potenzirt, dann aber die Potenz $a^b$ durch dieselbe Zahl b wieder radizirt.

Für die Gleichung II. $(\sqrt[b]{a})^b = a.$

1) Wenn man eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ mit ihrem Wurzelexponenten b potenzirt, so erhält man den Radikanden a.

2) Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man selbige erstlich durch eine Zahl b radizirt, dann aber diese Wurzel $\sqrt[b]{a}$ mit derselben Zahl b wieder potenzirt.

Für die Gleichung III. $(a^b) ? a = b.$

1) Wenn man eine Potenz $a^b$ durch ihren Dignanden a logarithmirt, so erhält man ihren Exponenten b.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man eine Zahl a mit ihr potenzirt, dann aber diese Potenz $a^b$ durch dieselbe Zahl a wieder logarithmirt.

Für die Gleichung IV. $a^{b?a} = b$.

1) Wenn man mit einem Logarithmen b?a, dessen Basis a potenzirt, so erhält man den Logarithmanden b.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man selbige erstlich durch eine Zahl a logarithmirt, dann aber mit diesem Logarithmen b?a dieselbe Zahl a wieder potenzirt.

Für die Gleichung V. $\sqrt[a?b]{a} = b$.

1) Wenn man mit einem Logarithmen a?b dessen Logarithmanden a radizirt, so erhält man dessen Basis b zum Resultat.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man eine Zahl a durch sie logarithmirt, dann aber dieselbe Zahl a mit diesem Logarithmen a?b wieder potenzirt.

Endlich für die Gleichung VI. $a?\sqrt[b]{a} = b$.

1) Wenn man mit einer Wurzel $\sqrt[b]{a}$ ihren Radikanden a logarithmirt, so erhält man ihren Wurzelexponenten b.

2) Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man durch sie eine Zahl a radizirt, dann aber mit dieser Wurzel $\sqrt[b]{a}$ dieselbe Zahl a wieder logarith-

garithmirt. (Vergleiche mit Anmerk. §. 14. und Anmerk. §. 32.)

Zu §. 60. 15). Nach (I.) z. B. ist: $\sqrt[3]{(4^3)} = 4$ und nach (II.): $(\sqrt[3]{64})^3 = 64$; da nehmlich $4^3 = 64$, so ist auch $\sqrt[3]{64} = 4$, nach 14). Ferner ist nach (III.): $(4^3) ? 4 = 3$ oder $64 ? 4 = 3$ (d. h. 3 ist die Zahl, mit welcher (§. 58.) die Zahl 4 potenzirt 64 giebt). Nach (IV.) aber: $4^{64 ? 4} = 64$; zur linken nehmlich ist erstlich $64 ? 4 = 3$, und dann $4^3 = 64$, wie zur rechten. Dann ist nach (V): $\sqrt[64 ? 4]{64} = 4$; denn man hat erstlich $64 ? 4 = 3$ und dann $\sqrt[3]{64} = 4$. Endlich ist nach (VI.) $64 ? (\sqrt[3]{64}) = 3$; denn zur linken ist erstlich $\sqrt[3]{64} = 4$ und dann $64 ? 4 = 3$ (weil $4^3 = 64$); wie zur rechten.

Uebrigens sind die letzten Gleichungen in (11) und (13), 1) $a ? a = 1$ und 2) $1 ? a = 0$ unter folgendem Ausdruck bekannt: 1) der Logarithme der Basis a in jedem Systeme ist immer die Einheit und 2) der Logarithme der Einheit in jedem Systeme ist immer der 0 gleich.

§. 61. Aus der Definizion der Potenzirung (§. 56.) geht noch hervor:

$$\text{I.} \quad a^{m+n} = a^m . a^n;$$

denn es bezeichnet $a^m$ ein Produkt von m Faktoren, $a^n$ ein Produkt von n Faktoren, folglich $a^m . a^n$ (§. 36.), ein Produkt, welches so viel Faktoren hat, als die beyden vorhergehenden zusammengenommen haben, nehmlich $m + n$ Faktoren (§. 11.). Dasselbe bezeichnet aber auch die Potenz $a^{m+n}$; folglich die Gleichung (I.) richtig. (E. §. 7.)

Re-

Regeln:

1) Eine Zahl a wird mit einer Summe $m + n$ potenzirt, wenn man selbige erstlich mit jedem der Summanden m und n potenzirt, und dann beyde Potenzen $a^m$ und $a^n$ mit einander multiplizirt.

2) Zwey Potenzen, die einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, werden mit einander multiplizirt, wenn man ihre Exponenten m und n addirt, den Dignanden a aber ungeändert beybehält.

Zu §. 61. Es ist z. B. $2^{3+4} = 2^3 . 2^4$; zur linken nehmlich hat man: $3 + 4 = 7$ und $2^7 = 2.2.2.2.2.2.2 = 128$; zur rechten aber: $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ und $8.16 = 128$; wie zur linken.

Anmerk. Man sieht leicht, daß sich dieß auch auf ein Produkt mehrerer solcher Potenzen erweitern läßt; es findet sich nehmlich auch:

$$a^{m+n+p} = a^m . a^n . a^p; \text{ u. s. w.}$$

§. 62. Daher auch, nach (§. 38. §. 61. u. §. 14. 8) II.):

$$\text{II. } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n};$$

Regeln:

1) Eine Zahl a wird mit einer Differenz $m - n$ potenzirt, wenn man selbige erstlich mit dem Minuenden m, dann auch mit dem Subtrahenden n potenzirt, und erstere Potenz $a^m$ durch letztere $a^n$ dividirt.

2) Zwey Potenzen $a^m$ und $a^n$, die einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Exponenten m und n von einander subtrahirt, den Dignanden a aber unverändert beybehält.

Z. §. 62. So ist z. B. $2^{7-3} = \frac{2^7}{2^3}$; zur linken nehmlich ist: $7-3 = 4$ und $2^4 = 16$; zur rechten aber hat man: $2^7 = 2.2.2.2.2.2.2 = 128$; $2^3 = 8$ und $\frac{128}{8} = 16$: wie zur linken auch.

§. 63. Ferner:

$$\text{III. } (ab)^m = a^m \, . \, b^m;$$

denn es ist nach (§. 60. 1)):

$$(ab)^m = (ab)(ab)(ab) \ldots\ldots = (\text{§. } 36.)\,(a.a.a.a.\ldots) \times (b.b.b.\ldots) = (\text{§. } 60.\ 1))\ a^m . b^m.$$

Regeln:

1) Ein Produkt ab wird mit einer Zahl m potenzirt, wenn man jeden einzelnen Faktor a und b potenzirt und dann die Potenzen $a^m$ u. $b^m$ mit einander multiplizirt.

2) Zwey Potenzen $a^m$ und $b^m$, die einen gemeinschaftlichen Exponenten m haben, werden mit einander multiplizirt, wenn man ihre Dignanden a und b mit einander multiplizirt, den Exponenten m aber ungeändert beybehält.

Zu §. 63. So ist z. B. $(3.5)^2 = 3^2 . 5^2$; zur linken nehmlich ist: $3.5 = 15$ und $15^2 = 225$; zur rechten aber: $3^2 = 9$, dann $5^2 = 25$ endlich $9.25 = 225$; wie zur linken.

An-

Man sieht sogleich, daß dies, durch mehrmal wiederholte Anwendung desselben Satzes, auch auf ein Produkt mehrerer Faktoren erweitert werden könne. Es ist nehmlich auch:

$$(abc)^m = a^m . b^m . c^m; \text{ u. s. w.}$$

§. 64. Auch, nach (§. 38. §. 63. §. 32. 15) II.):

$$\text{IV. } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

Die Regeln, die diese Gleichung enthält, sind:

1) Ein Quozient $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl m potenzirt, wenn man sowohl den Dividenden a als auch den Divisor b potenzirt, und dann erstere Potenz $a^m$ durch letztere $b^m$ dividirt.

2) Zwey Potenzen $a^m$ und $b^m$, die einen gemeinschaftlichen Exponenten m haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Dignanden a und b durch einander dividirt, den Exponenten m aber ungeändert beybehält.

Zu §. 64. Es ist z. B. $\left(\frac{6}{2}\right)^3 = \frac{6^3}{2^3}$; zur linken nehmlich ist: $\frac{6}{2} = 3$ und $3^3 = 27$; zur rechten aber: $6^3 = 216$, dann $2^3 = 8$ endlich $\frac{216}{8} = 27$; wie zur linken auch.

§. 65. Endlich

$$\text{V. } (a^m)^n = a^{mn};$$

denn es ist, nach (§. 60. 1)):

$$(a^m)^n = (a^m)(a^m)(a^m)\ldots = (\text{§. 61.})\ a^{m+m+m+\ldots}$$
$$= (\text{§. 32. 1)})\ a^{mn}.$$

Re-

Regeln:

1) Eine Potenz $a^m$ wird mit einer Zahl n potenzirt, wenn man den Exponenten m mit n multiplizirt, den Dignanden a aber ungeändert beybehält.

2) Eine Zahl a wird mit einem Produkte mn potenzirt, wenn man selbige erstlich durch den einen Faktor m, dann die erhaltene Potenz $a^m$ noch durch den andern Faktor n potenzirt.

Zu §. 65. So ist z. B. $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4}$; zur linken nehmlich ist: $3^2 = 9$ und $9^4 = 6561$; zur rechten aber: $2 \cdot 4 = 8$ und $3^8 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6561$; wie zur linken.

§. 66. Es sind daher folgende Ausdrücke einander gleich:

$$(a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m.$$

Unter den sich hieraus ergebenden Gleichungen wollen wir noch folgende herausheben:

$$\text{VI.} \quad (a^n)^m = (a^m)^n.$$

d. h. Eine Potenz $a^n$ wird mit einer Zahl m potenzirt, wenn man den Dignanden a mit dieser Zahl m potenzirt, den Exponenten n aber unverändert läßt.

Zu §. 66. Es ist z. B. $(3^2)^4 = (3^4)^2$; zur linken nehmlich: $3^2 = 9$ und $9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$; zur rechten aber: $3^4 = 81$ und dann $81^2 = 81 \cdot 81 = 6561$; wie zur linken.

§. 67. Besondere Anwendungen einiger vorhergehender Sätze, als Vorbereitung zum folgenden Paragraphen.

Es ist:

I. Anwendung des (§. 46. X.)

1) $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p-1+2}{2}=\frac{p+1}{2}$

2) $\frac{p-2}{3}+1=\frac{p-2+3}{3}=\frac{p+1}{3}$

3) $\frac{p-3}{4}+1=\frac{p-3+4}{4}=\frac{p+1}{4}$

4) $\frac{p-(m-1)}{m}+1=\frac{p-(m-1)+m}{m}=\frac{p+1}{m}$

II. Anwendung des (§. 48.):

1) $\frac{p(p-1)}{1.2}=\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}$

2) $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}=\frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{p-2}{3}$

3) $\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}=\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}.\frac{p-3}{4}$

4) $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.[p-(m-2)].[p-(m-1)]}{1.2.3\ldots.(m-1).m}$

$=\frac{p(p-1)\ldots\ldots[p-(m-2)]}{1.2\ldots.(m-1)}.\frac{p-(m-1)}{m}$

III. Anwendung von (§. 32. 6) u. §. 67. I.)

1) $\frac{p}{1}.\frac{p-1}{2}+\frac{p}{1}=\frac{p}{1}.\left[\frac{p-1}{2}+1\right]=(\text{I}, 1)\frac{p}{1}.\frac{p+1}{2}$

2) $\frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{p-2}{3}+\frac{p(p-1)}{1.2}=\frac{p(p-1)}{1.2}\left[\frac{p-2}{3}+1\right]$

$=(\text{I}. 2.)\ \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{p+1}{3}$

und

und eben so:

$$3)\ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \cdot \frac{p-3}{4} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$$

$$= \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \cdot \frac{p+1}{4}$$

u. s. w.

IV. Anwendung von (§. 32. 6) 12, §. 33. und §. 14. 4)). Es ist:

$$1)\ 2a^2b + a^2b = 2(a^2b) + a^2b = 3a^2b$$

$$2)\ ab^2 + 2ab^2 = 3ab^2$$

$$3)\ 3a^3b + a^3b = 4a^3b$$

$$4)\ 3a^2b^2 + 3a^2b^2 = 6a^2b^2$$

$$5)\ pa^pb + a^pb = (p+1)a^pb\ (\text{§. 32. 6})$$

$$6)\ \frac{p(p-1)}{1.2}[a^{p-1}b^2] + \frac{p}{1}[a^{p-1}b^2]$$

$$= (\text{§. 33. u. III. 1})\ \frac{(p+1)p}{1.2}[a^{p-1}b^2]$$

$$7)\ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}[a^{p-2}b^3] + \frac{p(p-1)}{1.2}[a^{p-2}b^3]$$

$$= (\text{§. 33. u. III. 2})\ \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}[a^{p-2}b^3]$$

$$8)\ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}[a^{p-3}b^4] + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}[a^{p-3}b^4]$$

$$= (\text{§. 33. u. III. 3})\ \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}[a^{p-3}b^4]$$

u. s. w.

V. An-

V. Anwendung des (§. 60. 6))

1) $a.a = a^2$; 2) $a^2.a = a^3$; 3) $a^3.a = a^4$;
4) $a^{p-1}.a = a^p$; 5) $a^{p-2}.a = a^{p-1}$; 6) $a^{p-3}.a = a^{p-2}$;
7) $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$;
8) $(a+b)^2 . (a+b) = (a+b)^3$;
9) $(a+b)^3 . (a+b) = (a+b)^4$;
10) $(a+b)^p . (a+b) = (a+b)^{p+1}$.

u. s. w.

VI. Anwendung von (§. 36. und V).

1) $(2ab)a = 2a^2b$ 2) $(2ab)b = 2ab^2$
3) $(3a^2b)a = 3a^3b$ 4) $(3a^2b)b = 3a^2b^2$
6) $(3ab^2)a = 3a^2b^2$ 6) $(3ab^2)b = 3ab^3$
7) $[p.a^{p-1}b]a = p.a^pb$ 8) $[pa^{p-1}b]b = pa^{p-1}b^2$
9) $\left[\frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}.b^2\right]a = \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-1}b^2$
10) $\left[\frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}b^2\right]b = \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2}b^3$
11) $\left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}b^3\right]a = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-2}b^3$
12) $\left[\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}b^3\right]b = \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-3}b^4$

u. s. w.

§. 68. Es ist nun:

$$\text{VII. } (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

(wo die angehängten Punkte anzeigen sollen, daß

die

die Anzahl der Summanden zur rechten des (=) Zeichen $m+1$, d. h. um 1 größer als der Exponent $m$ ist, und daß die folgenden Glieder nach demselben Gesetz fortgehen, nach welchem die hier angegebenen sich richten).

Beweis

A. Es ist $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=$ (§. 37. 1)) $aa$
$+ab+ba+bb$

daher 1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Ferner ist:

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$=$ (§. 35. 1)) $(a^2+2ab+b^2)a$
$+(a^2+2ab+b^2)b$
$=$ (§. 67. V. VI. u. IV) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

oder: 2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Geht man auf diesem Wege weiter, so erhält man:

$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)=(a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3)$
$+(a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4)$

oder nach (§. 67. IV.):

3) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

B. Diese Formeln 1), 2) und 3) bleiben aber dieselben, wenn man sie auf folgende Art schreibt (§. 14. 4) u. 2) §. 36. Anmerk. 2) §. 32. 3) §. 60. 10) u. 12)):

1) $(a+b)^2=a^2+\frac{2}{1}a^{2-1}b+\frac{2(2-1)}{1\cdot 2}a^{2-2}b^2$,

2)

2) $(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^{3-1} b + \frac{3(3-1)}{1.2} a^{3-2} b^2$

$$+ \frac{3(3-1)(3-2)}{1.2.3} a^{3-3} b^3.$$

3) $(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1} a^{4-1} b + \frac{4(4-1)}{1.2} a^{4-2} b^2$

$$+ \frac{4(4-1)(4-2)}{1.2.3} a^{4-3} b^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.2.3.4} a^{4-4} b^4.$$

C. Folglich erhellet die Richtigkeit unsrer Formel (VII.) in den besondern Fällen, wo $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$ ist. Könnte man daher erweisen, daß wenn gedachte Formel gilt, so bald m irgend eine bestimmte Zahl bezeichnet, sie dann auch immer gelten müsse, wenn m die nächstfolgende Zahl ausdrückt, so würde aus (B) folgern, daß die gedachte Formel (VII.) auch gilt, wenn $m = 5$, dann auch, wenn $m = 6$, und allgemein, wenn m alle folgenden Zahlen; folglich auch, wenn m irgend eine unbestimmte Zahl bezeichnet.

D. Man nehme also an: man habe für die Zahl p, die statt m gesetzt wurde, die Gleichung (VII.) richtig befunden, so daß wirklich sey:

C. $(a+b)^p = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^2$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^3 + \ldots\ldots$$

so erhält man, weil $(a+b)^p (a+b) = (a+b)^{p+1}$ ist, indem man, wie in (A.) immer geschehen, erstlich mit a, dann auch mit b multiplizirt, und die Produkte addirt (§. 35. 1)), (zu dem Ende die beyden

den Reihen, die man erhält, dergestalt unter einander schreibt, daß diejenigen Produkte, die gemeinschaftliche Faktoren haben, unter einander zu stehen kommen) nach (§. 67. V. 10. und V. VI.):

$$(a+b)^{p+1} = a^{p+1} + \frac{p}{1} a^p b + \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-1} b^2$$

$$+ a^p b + \frac{p}{1} a^{p-1} b^2$$

$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-2} b^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} a^{p-3} b^4 + \ldots$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2} a^{p-2} b^3 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} a^{p-3} b^4 + \ldots\ldots$$

oder, wenn man die unter einander stehenden Glieder addirt (§. 32. 12) und §. 67. IV.):

$$\odot.\ (a+b)^{p+1} = a^{p+1} + \frac{p+1}{1} a^p b + \frac{(p+1)p}{1.2} a^{p-1} b^2$$

$$+ \frac{(p+1)\,p\,(p-1)}{1.2.3} a^{p-2} b^3$$

$$+ \frac{(p+1)\,p\,(p-1)(p-2)}{1.2.3.4} a^{p-3} b^4 + \ldots$$

Bezeichnet man nun die nach p folgende nächstgrößere Zahl durch q, so daß also $p+1=q$, auch $p=q-1$, $p-1=q-2$, $p-2=q-3$, $p-3=q-4$, u. s. w. ist, so wird obige Formel ($\odot$) in folgende verwandelt:

$$(a+b)^q = a^q + \frac{q}{1} a^{q-1} b + \frac{q(q-1)}{1.2} a^{q-2} b^2$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} a^{q-3} b^3$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4} a^{q-4} b^4 + \ldots$$

und

und diese Formel stimmt vollkommen mit der Formel (C) und (VII.) überein; d. h. man hat jetzt erwiesen, daß, so oft die Formel (VII.) für irgend eine Zahl p gilt, die statt m gesetzt wird, sie dann auch immer für die um 1 größere Zahl $p+1$, die wir hier mit q bezeichnet haben, statt finde.

E. Da aber die Formel (VII.) richtig ist für $m=2$, $m=3$ und $m=4$ (nach B.), so ist sie (nach D.) auch richtig für $m=5$, dann aber auch für $m=6$, u. s. w. für jede folgende Zahl. Welches zu erweisen war.

Uebrigens lehret diese Formel (VII.) wie man eine Summe $a+b$ mit einer Zahl m potenzirt.

Zu §. 68. Man setze in (VII.) $a=2$, $b=4$ und $m=5$, so erhält man:

$$(2+4)^5 = 2^5 + 5.2^4.4 + 10.2^3.4^2 + 10.2^2.4^3 + 5.2.4^4 + 4^5;$$

zur linken nehmlich hat man: $2+4=6$ und $6^5 = 6.6.6.6.6 = 7776$; zur rechten aber: $2^5 = 32$, $5.2^4.4 = 5.16.4 = 320$, $10.2^3.4^2 = 10.8.16 = 1280$, $10.2^2.4^3 = 2560$, $5.2.4^4 = 2560$, $4^5 = 1024$ und endlich: $32+320+1280+2560+2560+1024 = 7776$; wie zur linken auch. Vorstehender Satz (VII.) ist übrigens unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes bekannt.

§. 69. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, daß auch ist:

$$\text{VIII.}\quad (a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots;$$

wo die einzelnen Ausdrücke abwechselnd addirt und subtrahirt sind. Diese Gleichung lehret, wie man eine Differenz a — b mit einer Zahl m potenzirt.

Zu §. 69. So ist z. B. für a = 5, b = 2 und m = 4 $(5-2)^4 = 5^4 - 4.5^3.2 + 6.5^2.2^2 - 4.5.2^3 + 2^4$; zur linken nehmlich hat man: $5 - 2 = 3$, und $3^4 = 81$; zur rechten aber: $5^4 = 625$, $4.5^3.2 = 4.125.2 = 1000$, $6.5^2.2^2 = 6.25.4 = 600$, $4.5.2^3 = 4.5.8 = 160$, $2^4 = 16$: endlich $625 - 1000 =$ (§. 26.) $- 375$, $- 375 + 600 = 600 - 375 = 225$, $225 - 160 = 65$ und $65 + 16 = 81$; wie zur linken.

§. 70. Da eine Wurzel nichts anders als eine Zahl bezeichnet, die, mit dem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikanden giebt, so folgt, daß jeder Ausdruck, der dieselbe Eigenschaft hat, nehmlich, mit dem Wurzelexponenten einer Wurzel potenzirt, den Radikanden giebt, dieselbe Zahl bezeichnet, die auch durch die Wurzel bezeichnet wird; d. h. gedachter Ausdruck muß der Wurzel gleich seyn. (E. §. 7.) — Hat man daher die Richtigkeit einer Gleichung nachzuweisen, deren eine Seite eine Wurzel ist, so nehme man den andern Ausdruck (die andere Seite E. §. 8.), und potenzire selbigen mit dem Wurzelexponenten dieser Wurzel; kommt nun der Radikand derselben heraus, so ist die Richtigkeit der gegebenen Gleichung erkannt. (Vergl. §. 15. u. §. 38.)

Zu §. 70. Soll z. B. die Richtigkeit der Gleichung $\sqrt[3]{64} = 4$, deren linke Seite eine Wurzel ist, nachgewiesen werden, so nehme man den andern Ausdruck (zur rechten) 4 und potenzire selbigen mit dem Wur-

zelexponenten 3; ergiebt sich nun der Radikand 64, so ist die gegebene Gleichung richtig.

§. 71. Auf diese Art kann man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$\text{I.}\quad \sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b};$$

denn der Ausdruck zur linken ist eine Wurzel (der zur rechten ein Produkt) daher, (nach §. 70.):

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m = (\S.63.)\,(\sqrt[m]{a})^m.(\sqrt[m]{b})^m\,(\S.60.\ n.15.\ II.)\ a.b.$$

folglich die Gleichung (I.) richtig.

Regeln:

1) Ein Produkt ab wird durch eine Zahl m radizirt, wenn man jeden Faktor a und b einzeln radizirt, dann aber beyde Wurzeln $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$ mit einander multiplizirt.

2) Zwey Wurzeln $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$, die einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten m haben, werden mit einander multiplizirt, wenn man ihre Radikanden a und b mit einander multiplizirt, den Wurzelexponenten m aber unverändert beybehält.

Zu §. 71. So ist z. B. $\sqrt[3]{(8.64)} = \sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[3]{64}$; zur linken nehmlich: $8.64 = 512$ und $\sqrt[3]{512} = 8$ (weil $8^3 = 512$ ist); zur rechten aber: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{64} = 4$ und $2.4 = 8$; wie vorher.

Anmerk. Dieser Satz läßt sich auch auf ein Produkt mehrerer Faktoren erweitern.

Es ist nehmlich: $\sqrt[m]{(abc)} = \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[m]{b}\,.\,\sqrt[m]{c}$; u. s. w.

§. 72.

§. 72. Daher auch:

$$\text{II.} \quad \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

denn wegen des Quozienten zur rechten (der Ausdruck zur linken ist eine Wurzel) hat man, nach (§. 38.):

$$\left[\sqrt[m]{(a:b)}\right] . \sqrt[m]{b} = (\text{§. 71.}) \sqrt[m]{\left[(a:b)\,b\right]}$$

$$= (\text{§. 32. n. 15. II.}) \sqrt[m]{a};$$

folglich die Gleichung (II.) erwiesen.

Diese Gleichung lehret:

1) wie man einen Quozienten a:b durch eine Zahl m radizirt; dann

2) wie man zwey Wurzeln $\sqrt[m]{a}$ und $\sqrt[m]{b}$, die einen gemeinschaftlichen Wurzelexponenten m haben, durch einander dividirt.

Zu §. 72. Es ist z. B. $\sqrt[2]{(36:4)} = \sqrt[2]{36} : \sqrt[2]{4}$; zur linken nehmlich hat man: $36:4 = 9$ und $\sqrt[2]{9} = 3$; zur rechten aber: $\sqrt[2]{36} = 6$, $\sqrt[2]{4} = 2$ und $6:2 = 3$; wie zur linken.

§. 73. Auch ist:

$$\text{III.} \quad \sqrt[m]{(a^n)} = a^{n:m};$$

denn man hat zur linken eine Wurzel (zur rechten eine Potenz), daher, nach (§. 70.):

$(a^{n:m})^m = (\text{§. 65.})\ a^{(n:m)m} = (\text{§. 32. n. 15. II.})\ a^n$ mithin die Gleichung (III.) richtig.

Diese Gleichung lehrt uns:

1) wie man eine Potenz $a^n$ durch eine Zahl m radizirt,

2) wie man eine Zahl a mit einem Quozienten n : m potenzirt.

Zu §. 73. So ist z. B. $\sqrt[3]{(4^6)} = 4^{6:3}$; zur linken nehmlich ist: $4^6 = 4096$ und $\sqrt[3]{4096} = 16$ (weil $16^3 = 4096$ ist); zur rechten aber $6 : 3 = 2$ und $4^2 = 16$; wie zur linken.

§. 74. Ferner ist:

$$\text{IV.} \quad \sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n;$$

denn zur linken hat man eine Wurzel (zur rechten eine Potenz), daher, nach (§. 70.):

$[(\sqrt[m]{a})^n]^m =$ (§. 66.) $[(\sqrt[m]{a})^m]^n =$ (§. 60. n. 15. II.) $a^n$ welches zu zeigen war.

Die Regeln dieser Gleichung enthalten:

1) wie man eine Potenz $a^n$ durch eine Zahl m radizirt; und

2) wie man eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ mit einer Zahl n potenzirt.

Zu §. 74. Es ist z. B. $\sqrt[3]{(64^2)} = (\sqrt[3]{64})^2$; zur linken nehmlich ist: $64^2 = 4096$ und $\sqrt[3]{4096} = 16$; zur rechten aber $\sqrt[3]{64} = 4$ und $4^2 = 16$; wie auch zur linken.

Anmerk. Nach (§. 13. n. 2.) kann man daher in den beyden Ausdrücken $\sqrt[m]{(a^n)}$ und $(\sqrt[m]{a})^n$ die

die Klammern weglassen und für beyde bloß setzen $\sqrt[m]{a^n}$, indem dieses Bild immer dieselbe Zahl bezeichnet, man mag es als eine Wurzel oder als eine Potenz ansehen.

§. 75. Eben so:

$$\text{V.}\quad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:n]{a};$$

denn der Ausdruck zur rechten ist eine Wurzel, daher, nach (§. 70.):

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{m:n} = (\text{§. 74. u. §. 65.})\ \sqrt[m]{a^{n\,(m:n)}}$$

$$= \text{§. 32. n. 15. II.)}\ \sqrt[m]{a^m} = (\text{§. 60. n. 15. I.})\ a.$$

demnach die Gleichung (V.) erwiesen.

Die Regeln derselben lehren:

1) Eine Potenz $a^n$ wird durch eine Zahl m radizirt, wenn man diese Zahl m durch den Exponenten n dividirt, und dann durch den Quozienten m:n den Dignanden a radizirt.

2) Eine Zahl a wird durch einen Quozienten m:n radizirt, wenn man selbige erstlich mit dem Divisor m potenzirt, dann aber diese Potenz $a^n$ durch den Dividenden m radizirt.

Zu §. 75. Es ist z. B. $\sqrt[6]{16^3} = \sqrt[6:3]{16}$; zur linken nehmlich hat man: $16^3 = 4096$ und $\sqrt[6]{4096} = 4$ (weil $4^6 = 4096$ ist); zur rechten aber: $6:3 = 2$ und $\sqrt[2]{16} = 4$; wie zur linken.

§. 76. Es sind daher alle folgenden Ausdrücke einander gleich:

$$\sqrt[m]{(a^n)}$$

$$\sqrt[m]{(a^n)} = (\text{§.} 74.)(\sqrt[m]{a})^n = (\text{§.} 75.)\sqrt[m:n]{a} = (\text{§.} 73)\, a^{n:m}$$
$$= (\text{§.} 51.)\, a^{\frac{pn}{pm}} = (\text{§.} 73.)\sqrt[pm]{(a^{pn})} = (\sqrt[pm]{a})^{pn}$$
$$= (\text{§.} 52.)\, a^{\frac{n:p}{m:p}} = (\text{§.} 73.)\sqrt[m:p]{(a^{n:p})} = (\sqrt[m:p]{a})^{n:p}.$$

Von den Gleichungen, die sich ergeben, wenn man immer zwey dieser Ausdrücke durch das (=) Zeichen verbindet, wollen wir, ausser den (§§. 73. 74. u. 75.) aufgestellten, noch folgende angeben:

$$\text{VI.}\quad a^{n:m} = \sqrt[m:n]{a}$$
$$\text{VII.}\quad \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}$$
$$\text{VIII.}\quad \sqrt[m:p]{a^{n:p}} = \sqrt[m]{a^n}$$

aus (VII.) folgt auch noch für $n=1$, nach (§. 60. n. 10. u. §. 32. n. 2.):

$$\text{IX.}\quad \sqrt[mp]{a^p} = \sqrt[m]{a}.$$

Zu §. 76. Der Gleichung (VII.) zu Folge hat man: $\sqrt[3.2]{2^{6.2}} = \sqrt[3]{2^6}$; zur linken nehmlich: $6.2 = 12$, $2^{12} = 4096$, $3.2 = 6$ und $\sqrt[6]{4096} = 4$; zur rechten aber: $2^6 = 64$ und $\sqrt[3]{64} = 4$; wie zur linken. Nach (VIII.) ist: $\sqrt[4:2]{9^{6:2}} = \sqrt[4]{9^6}$; zur linken nehmlich: $6:2 = 3$, $9^3 = 729$, $4:2 = 2$ und $\sqrt[2]{729} = 27$; zur rechten aber: $9^6 = 531441$ und $\sqrt[4]{531441} = 27$ (weil $27^4 = 531441$ ist). Endlich ist für (IX.): $\sqrt[2.3]{16^3} = \sqrt[2]{16}$; jeder Ausdruck nehmlich $= 4$.

Uebrigens sind bey obigen Gleichungen die wörtlichen Ausdrücke der Regeln, die sie enthalten, weggelassen worden, um nicht allzuweitläufig zu werden.

§. 77.

§. 77. Es ist ferner:

$$\text{X.}\quad \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[mn]{a};$$

denn der Ausdruck zur rechten (so wie zur linken) ist eine Wurzel, demnach:

$$[\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}]^{mn} = (\text{§. } 65.)\ ([\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}]^{m})^{n}$$
$$= (\text{§. } 60.\ \text{n. } 15.\ \text{II.})\ (\sqrt[n]{a})^{n} = (\text{ebend.})\ a.$$

folglich nach (§. 70.) die Gleichung (X.) richtig.

Regeln:

1) Eine Wurzel $\sqrt[n]{a}$ wird durch eine Zahl m radizirt, wenn man den Wurzelexponenten n mit dieser Zahl m multiplizirt, den Radikanden a aber, als solchen, beybehält.

2) Eine Zahl a wird durch ein Produkt mn radizirt, wenn man selbige erstlich durch einen Faktor n, dann die entstehende Wurzel $\sqrt[n]{a}$ auch noch durch den andern Faktor m radizirt.

Zu §. 77. So ist z. B. $\sqrt[3]{(\sqrt[2]{4096})} = \sqrt[3.2]{4096}$; zur linken nehmlich hat man; $\sqrt[2]{4096} = 64$ und $\sqrt[3]{64} = 4$; zur rechten aber: $3.2 = 6$ und $\sqrt[6]{4096} = 4$; wie zur linken.

Anmerk. Dieß läßt sich auch auf ein Produkt mehrerer Faktoren erweitern. Es ist nehmlich auch:

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{(\sqrt[p]{a})})} = \sqrt[mnp]{a};\quad \text{u. s. w.}$$

§. 78.

§. 78. Es ist daher auch:

$$\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = (§. 77.)\ \sqrt[nm]{a} = (§. 32.\ n. 13.)\ \sqrt[mn]{a}$$
$$= (§. 77.)\ \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}$$

folglich:

$$\text{XI.}\quad \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}.$$

Zu §. 78. So ist z. B. $\sqrt[2]{(\sqrt[3]{64})} = \sqrt[3]{(\sqrt[2]{64})}$; zur linken nehmlich: $\sqrt[3]{64} = 4$ und $\sqrt[2]{4} = 2$; zur rechten aber $\sqrt[2]{64} = 8$ und $\sqrt[3]{8} = 2$; wie zur linken.

§. 79. Ferner:

$$\text{XII.}\quad \sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{(a^n\,.\,b^m)};$$

denn zur rechten hat man eine Wurzel (zur linken ein Produkt), daher:

$$(\sqrt[m]{a}\,.\,\sqrt[n]{b})^{mn} = (§. 63.)\ (\sqrt[m]{a})^{mn}\,.\,(\sqrt[n]{b})^{mn}$$
$$= (§. 65.\ u.\ §. 60.\ n. 15.\ II.)\ a^n\,.\,b^m$$

folglich nach (§. 70.) die Gleichung (XII.) richtig.

Hieraus folgt für $m = 1$, nach (§. 60. n. 11. §. 32. n. 2. u. §. 60. n. 10.):

$$\text{XIII.}\quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n\,.\,b)}.$$

Zu §. 79. So ist z. B. nach (XII.): $\sqrt[3]{8}\,.\,\sqrt[2]{9} = \sqrt[3.2]{(8^2\,.\,9^3)}$; zur linken nehmlich ist: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[2]{9} = 3$ und $2\,.\,3 = 6$; zur rechten aber: $8^2 = 64$; $9^3 = 729$; $64\,.\,729 = 46656$, dann $3\,.\,2 = 6$ und $\sqrt[6]{46656} = 6$ (§. 70.) Nach (XIII.) aber; $2\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(2^3\,.\,64)}$

zur

zur linken nehmlich: $\sqrt[3]{64} = 4$ und $2 . 4 = 8$; zur rechten aber: $2^3 = 8$, $8 . 64 = 512$ und $\sqrt[3]{512} = 8$; wie zur linken auch.

§. 80. Eben so ist:

$$\text{XIV.} \quad (\sqrt[m]{a}) : (\sqrt[n]{b}) = \sqrt[mn]{(a^n : b^m)}$$

denn der Ausdruck zur rechten ist eine Wurzel (der zur linken ein Quozient), folglich:

$$(\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{b})^{mn} = (\S.\ 64.)\ (\sqrt[m]{a})^{mn} : (\sqrt[n]{b})^{mn}$$
$$= (\S.\ 65.\ \text{u.}\ \S.\ 60.\ \text{n.}\ 15.\ \text{II.})\ a^n : b^m.$$

demnach die Gleichung (XIV.) erwiesen, nach (§. 70.).

Hieraus folgt nach (§. 60. n. 11. n. 10. §. 32. n. 2.), für $m = 1$:

$$\text{XV.} \quad a : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n : b)} \quad \text{und für } n = 1$$

$$\text{XVI.} \quad (\sqrt[m]{a}) : b = \sqrt[m]{(a : b^m)}.$$

Die Gleichungen (XII. u. XIV.) lehren uns, wie man zwey Wurzeln, so wie die Gleichungen (XIII. XV. u. XVI.) lehren, wie man eine Wurzel und ein einfaches Zahlbild, mit einander multiplizirt und durch einander dividirt.

Zu §. 80. So ist z. B. nach (XIV.) $\sqrt[2]{64} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[2.3]{(64^3 : 8^2)}$ nehmlich jeder Ausdruck = 4. Nach (XV.) aber: $6 : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(6^3 : 8)} = 3$; und nach (XVI.), $(\sqrt[2]{36}) : 2 = \sqrt[2]{(36 : 2^2)} = 3$.

§. 81. Da ein Logarithme b?a nichts anders bezeichnet als eine Zahl, mit welcher die Basis

sis a potenzirt werden muß, um den Logarithmanden b zu erzeugen (§. 58.), so folgt, daß jeder Ausdruck, der, wenn man die Basis a mit ihm potenzirt, den Logarithmanden b giebt, dieselbe Zahl bezeichnet, also dem Logarithmen b?a gleich ist (E. §. 7.) So oft daher die Richtigkeit einer Gleichung nachgewiesen werden soll, deren eine Seite ein Logarithme ist, so nehme man die Basis dieses Logarithmen, und potenzire selbige mit der andern Seite der Gleichung; ergiebt sich nun der Logarithmand, so ist diese andere Seite der erstern (dem Logarithmen) gleich; d. h. die gegebene Gleichung richtig. (Vergl. §. 15. §. 38. u. §. 70.)

Zu §. 81. Soll z. B. die Richtigkeit der Gleichung 1000?10. = 3, deren Ausdruck zur linken ein Logarithme ist, nachgewiesen werden, so nehme man die Basis 10 und potenzire selbige mit dem Ausdruck zur rechten 3; ergiebt sich nun der Logarithmand 1000, so bezeichnet 3 dieselbe Zahl, die auch das Bild (Logarithme) 1000?10 bezeichnet, daher die Gleichung richtig. (E. §. 7.)

§. 82. Auf diesem Wege können wir uns nun leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$\text{I.}\quad (ab)?c = a?c + b?c;$$

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (der zur rechten eine Summe), dahero nach (§. 81.):

$$c^{a?c + b?c} = (\S.61.)\ c^{a?c} \,.\, c^{b?c} = (\S.60.\ \text{n.}\ 15.\text{IV.})\ a\,.\,b;$$

welches zu zeigen war.

Die Regeln die diese Gleichung (I.) enthält, sind, wörtlich ausgedrückt:

1)

1) Ein Produkt ab wird durch eine Zahl c logarithmirt, wenn man jeden einzelnen Faktor a und b logarithmirt, und die erhaltenen Logarithmen a?c und b?c addirt.

2) Zwey Logarithmen a?c und b?c, die eine gemeinschaftliche Basis c haben, werden zu einander addirt, indem man ihre Logarithmanden a und b multiplizirt, die gemeinschaftliche Basis c aber, als solche, beybehält.

Zu §. 82. So ist z. B. (16.8)?2 = 16?2 + 8?2; zur linken nehmlich hat man: 16.8 = 128 und 128?2 = 7 (weil $2^7$ = 128 ist); zur rechten aber 16?2 = 4 und 8?2 = 3, endlich 4+3 = 7; wie zur linken auch.

Anmerk. Dieser Satz kann auch auf ein Produkt mehrerer Faktoren erweitert werden. Es ist nehmlich auch:

(abc)?p = a?p + b?p + c?p; u. s. w.

§. 83. Es ist:

II. (a:b)?c = a?c — b?c;

denn da der Ausdruck zur linken ein Logarithme ist (der zur rechten ist eine Differenz), so hat man nach (§. 81.):

$c^{a?c-b?c}$ =(§.62.) $c^{a?c}:c^{b?c}$ =(§.60.n.15.IV.)a:b;

folglich die Gleichung (II.) richtig.

Die Regeln dieser Gleichung lehren uns:

1) wie man einen Quozienten a:b durch eine Zahl c logarithmirt;

2) wie man zwey Logarithmen $a?c$ und $b?c$, die eine gemeinschaftliche Basis $c$ haben, von einander subtrahirt.

Zu §. 83. Es ist z. B. $(100000 : 100)?10 = 100000?10 - 100?10$; zur linken nehmlich: $100000 : 100 = 1000$ und $1000?10 = 3$; zur rechten aber $100000?10 = 5$ und $100?10 = 2$, endlich $5 - 2 = 3$; wie vorher.

§. 84. Ferner ist:

$$\text{III.} \quad (a^b)?c = b.(a?c);$$

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (der zur rechten ein Produkt), mithin nach (§. 81.):

$c^{b(a?c)} =$ (§. 65.) $(c^{a?c})^b =$ (§. 60. n. 15. IV.) $a^b$;

demnach die Gleichung (III.) erwiesen.

Regeln:

1) Eine Potenz $a^b$ wird durch eine Zahl $c$ logarithmirt, wenn man den Dignanden $a$ mit dieser Zahl $c$ logarithmirt, dann aber den so erhaltenen Logarithmen $a?c$ mit dem Exponenten $b$ multiplizirt.

2) Eine Logarithme $a?c$ und eine Zahl $b$ werden mit einander multiplizirt, wenn man den Logarithmanden $a$ mit dieser Zahl $b$ potenzirt, die Basis $c$ aber, als solche, beybehält.

Zu §. 84. So ist z. B. $16^3?2 = 3.(16?2)$; zur linken nehmlich hat man: $16^3 = 4096$ und $4096?2 = 12$ (weil $2^{12} = 4096$ ist); zur rechten aber: $16?2 = 4$ und $3.4 = 12$; wie zur linken auch.

§. 85. Auch ist:

$$\text{IV.} \quad (\sqrt[b]{a})?c = (a?c) : b;$$

denn

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (zur rechten ein Quozient), folglich nach (§. 81.):

$$c^{(a?c):b} = (\S.\ 73.)\ \sqrt[b]{c^{a?c}} = (\S.60.\ n.15.\ IV.)\ \sqrt[b]{a};$$

welches nachzuweisen war.

Diese Gleichung (IV.) lehrt:

1) wie man eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ durch eine Zahl c logarithmirt,

2) wie man einen Logarithmen $a?c$ durch eine Zahl b dividirt.

Zu §. 85. So ist z. B. $(\sqrt[3]{64})?2 = (64?2):3$; zur linken nehmlich ist: $\sqrt[3]{64} = 4$ und $4?2 = 2$; zur rechten aber: $64?2 = 6$ und $6:3 = 2$; wie zur linken.

Uebrigens werden nachstehende Formeln (§. 82—85. I—IV.) gewöhnlich so geschrieben:

1) $\log.\ (ab) = \log.\ a + \log.\ b$

2) $\log.\ (a:b) = \log.\ a - \log.\ b$

3) $\log.\ (a^b) = b.\ \log.\ a$

4) $\log.\ (\sqrt[b]{a}) = (\log.\ a):b.$

§. 86. Ferner ist:

$$V.\quad (a?c)\ (c?b) = a?b;$$

denn zur rechten hat man einen Logarithmen (zur linken ein Produkt), folglich nach (§. 81.):

$$b^{(a?c)\,(c?b)} = (\S.\ 65.)\ (b^{c?b})^{(a?c)} = (\S.\ 60.\ n.\ 15.\ IV.)\ c^{a?c} = (\text{ebend.})\ a;$$

demnach die Richtigkiet der Gleichung (V.) erkannt.

Hier-

Hieraus folgt auch noch, nach (§. 38.):

VI. $\frac{a?b}{a?c} = c?b$; und

VII. $\frac{a?b}{c?b} = a?c$;

Dann aber auch, aus (VI.):

VIII. $\frac{a?b}{a?c} = \frac{d?b}{d?c}$; und aus (VII.):

IX. $\frac{a?b}{c?b} = \frac{a?d}{c?d}$.

Die Regeln der Gleichung (VI.) sind:

1) Zwey Logarithmen a?b und a?c, die einen gemeinschaftlichen Logarithmanden a haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Basis c des letztern durch die Basis b des erstern logarithmirt.

2) Eine Zahl c wird durch eine Zahl b logarithmirt, wenn man eine beliebige Zahl a durch c und durch b logarithmirt, und dann letztern Logarithmen a?b durch erstern a?c dividirt.

Für die Gleichung (VII.) aber hat man:

1) Zwey Logarithmen a?b und c?b, die eine gemeinschaftliche Basis b haben, werden durch einander dividirt, wenn man den Logarithmanden a des erstern, durch den Logarithmanden c des letztern logarithmirt.

2) Eine Zahl a wird durch eine Zahl c logarithmirt, wenn man sowohl a als c durch ei-

ne dritte Zahl b logarithmirt, und dann die erhaltenen Logarithmen $a ? b$ und $c ? b$ durch einander dividirt.

Zu §. 86. Es ist z. B. nach (V.): $(64 ? 4) . (4 ? 2) = 64 ? 2$; denn zur linken ist: $64 ? 4 = 3$; $4 ? 2 = 2$, und $3 . 2 = 6$; zur rechten aber: $64 ? 2 = 6$; wie zur linken. Daher auch nach (VI.): $(64 ? 2) : (64 ? 4) = 4 ? 2$ und nach (VII.): $(64 ? 2) : (4 ? 2) = 64 ? 4$. (Uebrigens pflegen die Sätze (VIII. und IX.) gewöhnlich auf folgende Art ausgedrückt zu werden; nehmlich 1) der Satz (VIII.): Die Logarithmen einer und derselben Zahl a, aus zwey verschiedenen Logarithmensystemen, haben zu einander ein beständiges Verhältniß, d. h. immer dasselbe, welche Zahl man auch statt a setzen möge; dann 2) der Satz (IX.): Die Logarithmen zweyer Zahlen a und c aus einem und demselben Logarithmensystem haben in jedem System dasselbe Verhältniß zu einander.

§. 87. Es ist auch:

$$\text{X.} \quad a ? (\sqrt[d]{c}) = d . (a ? c);$$

denn man hat zur linken einen Logarithmen, (zur rechten ein Produkt), demnach zu Folge (§. 81.):

$$(\sqrt[d]{c})^{d\,(a ? c)} = (\text{§. 65.}) \left[(\sqrt[d]{c})^{d}\right]^{a ? c} = (\text{§. 60. n. 15. II.})\ c^{a ? c} = (\text{§. 60. n. 15. IV.})\ a$$

woraus die Richtigkeit der Gleichung (X.) erhellet.

Diese Gleichung lehrt:

1) wie man eine Zahl a durch eine Wurzel $\sqrt[d]{c}$ logarithmirt,

2) wie man eine Zahl d und einen Logarithmen $a ? c$ mit einander multiplizirt.

Zu

Zu §. 87. So ist z. B. $64 ? (\sqrt[3]{8}) = 3 . (64 ? 8)$; zur linken nehmlich ist: $\sqrt[3]{8} = 2$ und $64 ? 2 = 6$ (§. 81.); zur rechten aber: $64 ? 8 = 2$ und $3 . 2 = 6$; wie zur linken.

§. 88. Noch ist:

$$\text{XI.} \quad a ? (\sqrt[d]{c}) = d : (c ? a);$$

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (der zur rechten ein Quozient), und daher:

$$(\sqrt[d]{c})^{d : (c ? a)} = (\S. 73.) \sqrt[c ? a]{(\sqrt[d]{c})^d} = (\S. 60. n. 15. II.) \sqrt[c ? a]{c}$$
$$= (\S. 60. n. 15. V.)\ a$$

welches nachzuweisen war, nach (§. 81.).

Zu §. 88. So ist z. B. $8 ? (\sqrt[6]{64}) = 6 : (64 ? 8)$; zur linken nehmlich: $\sqrt[6]{64} = 2$ und $8 ? 2 = 3$; zur rechten aber: $64 ? 8 = 2$ und $6 : 2 = 3$; wie vorher.

§. 89. Vergleicht man (§. 84. mit §. 87. u. §. 88.), so erhält man:

$$(a^d) ? c = d\,(a ? c) = a ? (\sqrt[a]{c}) = d : (c ? a)$$

durch Verbindung je zweyer dieser Ausdrücke findet man, ausser den in den angeführten (§§.) aufgestellten Gleichungen, noch folgende:

$$\text{XII.} \quad (a^d) ? c = a ? \sqrt[d]{c}$$
$$\text{XIII.} \quad (a^d) ? c = d : (c ? a)$$
$$\text{XIV.} \quad d\,(a ? c) = d : (c ? a)$$

Zu §. 89. Nach (XII.) ist z. B. $(4^3) ? 8 = 4 ? (\sqrt[3]{8})$; zur linken nehmlich: $4^3 = 64$ und $64 ? 8 = 2$; zur rech-

rechten aber: $\sqrt[3]{8} = 2$ und $4 ? 2 = 2$; wie zur linken. Nach (XIII.) aber ist z. B. $(2^6) ? 8 = 6 : (8 ? 2)$; zur linken nehmlich: $2^6 = 64$ und $64 ? 8 = 2$; zur rechten aber: $8 ? 2 = 3$ und $6 : 3 = 2$; wie zur linken.

§. 90. Eben so hat man:

$$\text{XV.} \quad a ? (c^d) = (a ? c) : d$$

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (der zur rechten ein Quozient), und;

$$(c^d)^{(a ? c) : d} = (\S. 73. \text{ u. } \S. 74.) \left[\sqrt[d]{(c^d)}\right]^{a ? c}$$

$$= (\S. 60. \text{ n. } 15. \text{ I.}) \; c^{a ? c} = (\S. 60. \text{ n. } 15. \text{ IV.}) \; a$$

demnach die Gleichung (XV.) erwiesen, nach (§. 81).

Diese Gleichung enthält folgende Regeln:

1) Eine Zahl a wird durch eine Potenz $c^d$ logarithmirt, wenn man selbige erstlich durch den Dignanden c logarithmirt, dann aber den erhaltenen Logarithmen $a ? c$ durch den Exponenten d dividirt.

2) Ein Logarithme $a ? c$ wird durch eine Zahl d dividirt, wenn man die Basis c mit d potenzirt, den Logarithmanden a aber, als solchen, ungeändert beybehält.

Zu §. 90. Es ist z. B. $64 ? (2^3) = (64 ? 2) : 3$; zur linken nehmlich ist: $2^3 = 8$ und $64 ? 8 = 2$; zur rechten aber: $64 ? 2 = 6$ und $6 : 3 = 2$, wie vorher.

§. 91. Vergleicht man (§. 85. mit §. 90.), so findet man:

$$(\sqrt[d]{a}) ? c = (a ? c) : d = a ? (c^d)$$

 dem-

Bayerische Staatsbibliothek München

demnach:

$$\text{XVI.}\quad (\sqrt[d]{a}) ? c = a ? (c^d).$$

Zu §. 91. So z. B. ist: $(\sqrt[3]{1000000}) ? 10 = 1000000 ? (10^3)$; zur linken nehmlich hat man: $\sqrt[3]{1000000} = 100$, dann $100 ? 10 = 2$; zur rechten aber: $10^3 = 1000$ und $1000000 ? 1000 = 2$; wie vorher.

§. 92. Und:

$$\text{XVII.}\quad a^{c ? d} = \sqrt[d ? a]{c};$$

denn der Ausdruck zur rechten ist eine Wurzel, demnach, nach (§. 70.):

$$(a^{c?d})^{d?a} = (\text{§. 65.})\ a^{(c?d)(d?a)} = (\text{§. 86. V.})\ a^{c?a}$$
$$= (\text{§. 60. n. 15. IV.})\ c.$$

folglich die Gleichung (XVII.) richtig.

Zu §. 92. So ist z. B. $2^{64?8} = \sqrt[8?2]{64}$; zur linken nehmlich ist: $64 ? 8 = 2$ und $2^2 = 4$; zur rechten aber: $8 ? 2 = 3$ und $\sqrt[3]{64} = 4$, wie zur linken.

§. 93. Ferner:

$$\text{XVIII.}\quad a^{c?d} = \sqrt[d?c]{a};$$

denn (zur linken eine Potenz), zur rechten eine Wurzel, daher hat man nach (§. 70.):

$$(a^{c?d})^{d?c} = (\text{§. 65.})\ a^{(c?d)(d?c)} = (\text{§, 86. V.})\ a^{c?c}$$
$$= (\text{§. 60. n. 11.})\ a$$

folglich die Richtigkeit der Gleichung (XVIII.) dargethan.

§. 94.

§. 94. Es sind daher alle folgende Ausdrücke einander gleich:

$$\sqrt[d?a]{c} = (§. 92.)\, a^{c?d} = (§. 93.) \sqrt[d?c]{a} = (§. 92.)\, c^{a?d}$$

woraus noch hervorgeht:

$$\text{XIX.} \quad a^{c?d} = c^{a?d}$$

$$\text{XX.} \quad \sqrt[d?c]{a} = \sqrt[d?a]{c}.$$

Zu §. 94. Nach (XIX.) hat man z. B. $8^{16?2} = 16^{8?2}$; zur linken nehmlich: $16 ? 2 = 4$ und $8^4 = 4096$; zur rechten aber: $8 ? 2 = 3$ und $16^3 = 4096$; wie vorher. Nach (XX.) aber ist: $\sqrt[64?4]{8} = \sqrt[64?8]{4}$; zur linken: $64 ? 4 = 3$ und $\sqrt[3]{8} = 2$; zur rechten aber: $64 ? 8 = 2$ und $\sqrt[2]{4} = 2$; wie zur linken.

§. 95. Dann ist:

$$\text{XXI.} \quad (a^b) ? (a^c) = b : c;$$

zur linken nehmlich hat man einen Logarithmen (zur rechten einen Quozienten), daher nach (§. 81.):

$$(a^c)^{b:c} = (§. 65.)\, a^{c(b:c)} = (§. 32.\ n. 15.\ II.)\, a^b$$

demnach die Richtigkeit der Gleichung (XXI.) erkannt.

Diese Gleichung lehrt:

1) wie man zwey Potenzen $a^b$ und $a^c$, die einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, durch einander logarithmirt;

2) wie man eine Zahl b durch eine andere Zahl c dividirt.

Zu §. 95. So ist z. B. $(4^6) ? (4^2) = 6 : 2$; zur linken nehmlich: $4^6 = 4096$, $4^2 = 16$ und $4096 ? 16 = 3$ [weil $16^3 = 4096$ ist (§. 81.)]; zur rechten aber: $6 : 2 = 3$, wie vorher.

§. 96. Eben so:

$$\text{XXII.}\quad \sqrt[b]{a} ? \sqrt[c]{a} = c : b$$

denn nach (§. 81.) erhält man:

$$(\sqrt[c]{a})^{c:b} = (\S.73.) \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})^c} = (\S.60.\ n.15.\ II.) \sqrt[b]{a}$$

folglich die Gleichung (XXII.) richtig.

Zu §. 96. So ist z. B. $(\sqrt[2]{64}) ? (\sqrt[6]{64}) = 6 : 2$; zur linken ist nehmlich: $\sqrt[2]{64} = 8$, $\sqrt[6]{64} = 2$, und $8 ? 2 = 3$; zur rechten aber: $6 : 2 = 3$; wie vorher.

§. 97. Es ist:

$$\text{XXIII.}\quad (a^b) ? (c^b) = a ? c;$$

denn der Ausdruck zur linken ist ein Logarithme (so wie der zur rechten), daher nach (§. 81.):

$$(c^b)^{a?c} = (\S.66.) (c^{a?c})^b = (\S.60.\ n.15.\ IV.) a^b,$$

welches nachzuweisen war.

Von diesem Satze wollen wir wieder den wörtlichen Ausdruck der Regeln, die er enthält, angeben, was bey vielen der vorhergehenden Sätze, um die allzugroße Weitläufigkeit zu vermeiden, entweder gänzlich unterblieb, oder doch nur angedeutet wurde. Diese Regeln sind:

1) Zwey Potenzen $a^b$ und $c^b$, die einen gemeinschaftlichen Exponenten b haben, werden durch ein-

einander logarithmirt, wenn man den Exponenten b gegenseitig wegläßt, und nur die Dignanden a und c durch einander logarithmirt.

2) Ein Logarithme $a ? c$ bleibt unverändert, wenn man sowohl den Logarithmanden a als auch die Basis c mit einer und derselben Zahl b potenzirt. (Vergl. §. 51.).

Zu §. 97. Es ist z. B. $(8^4) ? (2^4) = 8 ? 2$; zur linken nehmlich: $8^4 = 4096$ und $2^4 = 16$ dann $4096 ? 16 = 3$; wie zur rechten.

§. 98. Auch:

$$\text{XXIV.} \quad (\sqrt[b]{a}) ? (\sqrt[b]{c}) = a ? c;$$

denn, wegen des Logarithmen zur linken, hat man nach (§. 81.):

$$(\sqrt[b]{c})^{a?c} = (\S.74.) \sqrt[b]{(c^{a?c})} = (\S.60.\ n.15.\ IV.) \sqrt[b]{a}$$

Zu §. 98. Es ist z. B. $(\sqrt[2]{64}) ? (\sqrt[2]{4}) = 64 ? 4$.

§. 99. Ferner:

$$\text{XXV.} \quad (a^b) ? \sqrt[d]{a} = bd$$

denn wegen des Logarithmen zur linken (zur rechten ein Produkt) hat man, nach (§. 81.):

$$(\sqrt[d]{a})^{bd} = (\S.65.) \left[(\sqrt[d]{a})^d\right]^b = (\S.60.\ n.15.\ II.)\ a^b.$$

Zu §. 99. So ist z. B. $(8^2) ? (\sqrt[3]{8}) = 2 . 3$; nehmlich jeder dieser beyden Ausdrücke $= 6$.

§. 100. Bey näherer Betrachtung der Sätze dieses und der vorhergehenden Kapitel findet man

eben

eben so, wie (§. 24. und §. 53.), daß sie nur das Verhältniß der VerbindungArten (Operazionen) zu einander ausdrücken, unabhängig von jeder bestimmten Zahl. So wie aber nicht jede Differenz und nicht jeder Quozient eine Zahl bezeichnet, wenn man statt der Buchstaben beliebige bestimmte Zahlen sich denkt, eben so bezeichnen auch nicht alle Wurzeln und Logarithmen immer Zahlen. Da sie aber dann gar keine Bedeutung haben, so kann man ihnen eine Bedeutung geben, und zwar diejenige, die sie erhalten, wenn man alle vorhergehenden Sätze unbedingt, ohne nur auf die Bedeutung der Bilder Rücksicht zu nehmen, statt finden läßt.

Dadurch, daß diese Annahme statt finden kann, erhält man den Vortheil, daß man ungestört fortarbeiten darf, ohne ängstlich nachsehen zu müssen, ob man es auch jedesmal noch mit wirklichen Zahlbildern zu thun habe, überzeugt, daß die Resultate, sobald sie wirkliche Zahlbilder enthalten, richtig sind, und wenn sie noch immer bloße Formen enthalten sollten, doch, nach den vorhergehenden Formeln behandelt, zu richtigen und brauchbaren Resultaten führen.

Uebrigens sind beyde Formen, nehmlich $\sqrt[b]{a}$, die man eine **radikative** und a?b, die man eine **logarithmative** (logarithmische) Form nennen könnte, so bald diese Bilder keine Zahl mehr bezeichnen, unter dem Namen der **Irrazionalzahlen** bekannt (Vergl. §. 24. u. §. 53.).

Zu §. 100. Die Bilder $\sqrt[5]{7}$ und 9?2 bedeuten also gar nichts, da sie Zahlbilder sind, aber keine Zahl bezeichnen;

nen; indem es keine Zahl giebt, die, mit 3 potenzirt, die Zahl 7 hervorbrächte; eben so wenig als es eine Zahl giebt, mit welcher die Zahl 2 potenzirt werden könnte, um die Zahl 9 zu geben. Nur unter der Voraussetzung, daß man alles was überhaupt von Wurzeln und Logarithmen gilt, in so ferne sie Zahlen bezeichnen, auch für diese Bilder statt finden lassen wolle, hat man nach (§.60. n. 15. II. IV.): $(\sqrt[3]{7})^3 = 7$ und $2^{9?2} = 9$, d. h. unter dieser Voraussetzung bezeichnen zwar die Bilder $\sqrt[3]{7}$ und $9?2$ keine Zahlen, geben aber, in Verbindung mit andern Zahlbildern, wirkliche Zahlbilder und führen zu richtigen Resultaten.

Uebrigens wiederhole ich hier nochmals, was ich schon (§. 24. u. §. 53.) gesagt habe, daß man sich nicht fürchten dürfe, daß die verschiedenen Lehrsätze den angeführten Bildern auch verschiedene Bedeutungen geben werden; denn diese Bilder erhalten durch gedachte Annahme keine absolute Bedeutung, sondern nur eine relative, in so ferne nehmlich die Formeln auch auf sie angewandt werden. Da nun alle Formeln auseinander und aus einer ersten abgeleitet sind, so sind dann gedachte Bedeutungen nach denselben Formeln auseinander und aus der ersten vorhin angegebenen Bedeutung abgeleitet, folglich als eine und dieselbe anzusehen.

Man kann vielleicht noch fragen: Ist die Beybehaltung jener Formen, die wir negative, gebrochene und irrazionale Zahlen nannten, in den (§. 24. 53 u. 100.) angeführten Bedeutungen, bloße Willkühr, oder hat sie einen höhern Grund; ist sie daher nothwendig? Auf diese Frage erwiedere ich: Die Zahlen haben keine Merkmale, als die verschiedene Stelle in der sie auf einander folgen, unterscheiden sich durch nichts anders von einander als durch diese verschiedene Stelle; und es kann demnach keine ver-

schie-

schiedenen Gattungen von Zahlen geben. Jene Formen entstehen also nur dadurch, daß man Bilder gebraucht, und, wegen der Beschränktheit unsers Geistes gebrauchen muß. Dies bewirkt, daß man Bilder an die Stelle der Begriffe bekommt, und mit diesen Bildern (Formeln) fortarbeitet, ohne auf ihren Inhalt Rücksicht zu nehmen. Nun ist es aber nothwendig, gedachte Formeln in ihrer größten Allgemeinheit, d. h. von allem Inhalt abstrahirend, zu gebrauchen, weil man sonst nie unbestimmte Zahlen betrachten dürfte, sondern immer ängstlich darauf sehen müßte, nicht Differenzen, Quozienten ꝛc zu behandeln, die keine Zahlen bezeichnen, also nicht mehr möglich sind: demnach ist es auch nothwendig, gedachte Formeln gerade in den ihnen (§. 24. 53 u. 100.) gegebenen Bedeutungen beyzubehalten, sobald man allgemeine Untersuchungen, die Zahlen betreffend, anstellen will; sobald man überhaupt Bilder gebraucht.

§. 101. Setzt man in (§. 73. III.) $n = 1$, so hat man nach (§. 60. n. 10.):

$$1)\ \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

und man kann daher jede Wurzel wie $\sqrt[m]{a}$ in eine Potenz $a^{\frac{1}{m}}$ verwandeln, deren Dignand der Radikand a der gegebenen Wurzel ist, und deren Exponent $\frac{1}{m}$ entsteht, wenn man 1 durch den Wurzel-Exponenten m dividirt. Man könnte daher, wenn man wollte, die Lehrsätze der Wurzeln unmittelbar aus der Lehre der Potenzen entwickeln, ja sogar das Wurzelzeichen beynahe gänzlich entbehren.

Setzt

Setzt man ferner in (§. 62.) o statt m, so findet sich nach (§. 26. und §. 60. n. 12.):

2) $a^{-n} = \frac{1}{(a^n)}$ u. nach (§. 32. n. 14.): $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Ferner ist:

$(-b)^2 =$ (§. 60. n. 1.) $(-b)(-b)$
$=$ (§. 55. n. 3.) $b^2$ und

$(-b)^{2m} =$ (§. 65.) $[(-b)^2]^m = (b^2)^m$
$=$ (§. 65.) $b^{2m}$ d. h.

3) $(-b)^{2m} = b^{2m}$.

Dann: $(-b)^{2m+1} =$ (§. 60. n. 6.) $(-b)^{2m} . (-b)$
$=$ (3.) $b^{2m} . (-b) =$ (§. 55. n. 2.) $-(b^{2m} . b)$
$=$ (§. 60. n. 6.) $-b^{2m+1}$ oder:

4) $(-b)^{2m+1} = -b^{2m+1}$.

Auch ist: 5) $\sqrt[-m]{c} = \frac{1}{\sqrt[m]{c}}$

denn nach (§. 70.) hat man:

$\left(\frac{1}{\sqrt[m]{c}}\right)^{-m} =$ (§. 72.) $\frac{1^{-m}}{\left(\sqrt[m]{c}\right)^{-m}} =$ (2.) $\frac{1 : 1^m}{1 : \left(\sqrt[m]{c}\right)^m}$
$=$ (§. 60. n. 2. und §. 60. n. 15. II.)
$\frac{1}{1 : c} =$ (§. 43. VI.) c.

Und aus (5.) auch:

6) $\sqrt[-m]{c} = \sqrt[m]{\frac{1}{c}}$

(weil $\sqrt[m]{\frac{1}{c}} =$ (§. 72. und §. 60. n. 3.) $\frac{1}{\sqrt[m]{c}}$ ist).

Setzt

Setzt man ferner in (§. 89. XIV.) 1 statt d, so findet man:

$$7)\ a\,?\,c = 1 : (c\,?\,a)$$

Eben so ergiebt sich aus (§. 83.) für $a = 1$, nach (§. 60. n. 13. und §. 26.):

$$8)\ \left(\frac{1}{b}\right)?\,m = -\,(b\,?\,m)$$

und nach (§. 26. und §. 83.):

$$9)\ \left(\frac{a}{b}\right)?\,m = -\left(\frac{b}{a}\right)?\,m$$

Dann auch:

$$m\,?\left(\frac{c}{d}\right) = (7.)\ 1 : \left[\left(\frac{c}{d}\right)?\,m\right]$$

$$= (9.)\ 1 : \left[-\left(\frac{d}{c}\right)?\,m\right]$$

$$= (§. 55.\ n. 5.)\ -1 : \left[\left(\frac{d}{c}\right)?\,m\right]$$

$$= (7.)\ -m\,?\,\frac{d}{c}\ \text{d. h.}$$

$$10)\ m\,?\left(\frac{c}{d}\right) = -\,m\,?\left(\frac{d}{c}\right)$$

Folglich:

$$\frac{a}{b}\,?\,\frac{c}{d} = (9.)\ -\frac{b}{a}\,?\,\frac{c}{d} = (10.) - \left[-\frac{b}{a}\,?\,\frac{d}{c}\right]$$

$$= (§. 27.\ n. 6.)\ \frac{b}{a}\,?\,\frac{d}{c}\ \text{d. h.}$$

$$11)\ \frac{a}{b}\,?\,\frac{c}{d} = \frac{b}{a}\,?\,\frac{d}{c}.$$

Anmerk. Die vorstehenden 3 Kapitel enthalten nun die Lehrsätze, die angeben, wie man je zwey

zwey von den 8 Zahlbildern, nehmlich das einfache, die Summe, Differenz, Produkt, Quozient, Potenz, Wurzel, Logarithme, zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplizirt, dividirt, potenzirt, radizirt und logarithmirt; und diese Lehrsätze sind hinreichend um alle möglichen Verrichtungen der höhern Zahlenlehre bewerkstelligen zu können, da nur die angeführten 7 Operazionen betrachtet werden, und jeder noch so zusammengesetzte Ausdruck doch immer eines von den gedachten 8 Zahlbildern seyn muß.

---

Vier

## Viertes Kapitel.

## Von der Vergleichung der Zahlbilder überhaupt.

§. 102. Die Gleichung $a = b$ drückt nichts anders aus, als daß beyde Bilder $a$ und $b$ eine und dieselbe Zahl bezeichnen, daß also überall das Bild $a$ statt des Bildes $b$ und das Bild $b$ statt $a$ gesetzt werden könne (E. §. 7.).

Die beyden Bilder die durch das Gleichheitzeichen verbunden sind, heißen die **Seiten der Gleichung** (E. §. 8.).

§. 103. Hat man daher die Gleichung:

$$a = b$$

so ist auch:

1) $a + m = b + m$ und 2) $m + a = m + b$

3) $a - m = b - m$ . 4) $m - a = m - b$

5) $a \,.\, m = b \,.\, m$ . 6) $m \,.\, a = m \,.\, b$

7) $a : m = b : m$ . 8) $m : a = m : b$

9) $a^m = b^m$ . 10) $m^a = m^b$

11) $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ . 12) $\sqrt[a]{m} = \sqrt[b]{m}$

13) $a \,?\, m = b \,?\, m$ . 14) $m \,?\, a = m \,?\, b$

weil man in den Ausdrücken zur linken statt $a$ immer $b$ setzen darf.

Man sagt: eine Gleichung $a = b$, und eine Zahl $m$, werden mit einander addirt, subtrahirt, multiplizirt, dividirt, potenzirt, radizirt und logarithmirt, und versteht darunter, daß jedes der beyden Zahlbilder, aus denen die Gleichung besteht, einzeln mit gedachter Zahl $m$ operirt werden soll; die so entstehenden Zahlbilder sind dann jedesmal wieder einander gleich, wie aus Vorhergehendem unmittelbar erhellet.

§. 104. Hat man nicht nur die Gleichung $a = b$, sondern auch noch $m = n$, so kann man eben so überall statt $m$ das Bild $n$ setzen und umgekehrt. Thut man dieses zur rechten, in den Gleichungen (§. 103.), so erhält man:

Wenn $a = b$ und $m = n$ ist:

| | |
|---|---|
| 1) $a + m = b + n$ | 2) $m + a = n + b$ |
| 3) $a - m = b - n$ | 4) $m - a = n - b$ |
| 5) $a . m = b . n$ | 6) $m . a = n . b$ |
| 7) $a : m = b : n$ | 8) $m : a = n : b$ |
| 9) $a^m = b^n$ | 10) $m^a = n^b$ |
| 11) $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b}$ | 12) $\sqrt[a]{m} = \sqrt[b]{n}$ |
| 13) $a ? m = b ? n$ | 14) $m ? a = n ? b$. |

Wenn man sagt: Die Gleichungen $a = b$ und $m = n$ werden mit einander addirt, subtrahirt, multiplizirt, dividirt, potenzirt, radizirt, logarithmirt, so versteht man darunter, daß die eine

ne

ne Seite der einen Gleichung mit der einen Seite der zweyten Gleichung, dann aber auch die zweyten Seiten der beyden Gleichungen mit einander operirt werden sollen; die dann sich ergebenden Zahlbilder sind immer wieder einander gleich, wie sogleich aus vorstehender Ansicht erhellet.

§. 105. Verbindet man (§. 104. mit §. 103.) und wendet (§. 14. n. 8. I. II. III. §. 32. n. 15. I. II. III. u. §. 60. n. 15. I — VI.) dabey an, so ergiebt sich sogleich:

1) Wenn eine der in (§. 103.) aufgestellten 14 Gleichungen statt findet, so findet auch jedesmal die ursprünglich gegebene Gleichung, demnach (nach §. 103.) auch jede der übrigen statt.

2) Wenn eine der in (§. 104.) aufgestellten 14 Gleichungen nebst einer der beyden ursprünglich gegebenen statt findet, so findet dann auch immer die zweyte der beyden ursprünglichen Gleichungen, demnach auch (nach §. 104.) jede der übrigen statt.

§. 106. Die Gleichung $a > b$ drückt aus, daß a eine in der Zahlenreihe später folgende (höhere, größere) Zahl bezeichne, als b; d. h. daß zu b noch mehrere Einheiten, noch eine Zahl, die mit q bezeichnet seyn mag, hinzukommen müsse, um die Zahl a zu erzeugen. (E. § 9.) Statt der Ungleichung $a > b$ kann man daher auch setzen die Gleichung $a = b + q$, und umgekehrt.

§. 107.

§. 107. Ist daher $a > b$ und $b > c$ so ist auch $a > c$; denn statt $a > b$ setze man: $a = b + q$ und statt $b > c$ die Gleichung $b = c + p$; dann setze man in ersterer Gleichung $a = b + q$ nach (E. §. 7.) $c + p$ statt b, so erhält man: $a = b + q$ $= (c + p) + q =$ (§. 14. n. 6.) $c + (p + q)$ folglich $a > c$ nach (§. 106.).

§. 108. Hat man die Ungleichung

$$a > b$$

so ist auch:

| | |
|---|---|
| 1) $a + m > b + m$ | 2) $m + a > m + b$ |
| 3) $a - m > b - m$ | 4) $m - a < m - b$ |
| 5) $a . m > b . m$ | 6) $m . a > m . b$ |
| 7) $a : m > b : m$ | 8) $m : a < m : b$ |
| 9) $a^m > b^m$ | 10) $m^a > m^b$ |
| 11) $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ | 12) $\sqrt[a]{m} < \sqrt[b]{m}$ |
| 13) $a ? m > b ? m$ | 14) $m ? a < m ? b$. |

Von der Richtigkeit dieser 14 Ungleichungen (sobald die erste $a > b$ gegeben ist) kann man sich, der Ordnung nach, auf folgende Art überzeugen:

Statt $a > b$ setze man $a = b + q$ (§. 106.), so ist nach (E. §. 7.), für (1. und 2.):

$a + m = (b + q) + m =$ (§. 14. n. 6.) $(b + m) + q$ folglich:

$a + m > b + m$ (nach §. 106.); und auch (§. 14. n. 5.) $m + a > m + b$.

Dann

Dann für (3.), wegen $a = b + q$, nach (E. §. 7.):

$a - m = (b + q) - m =$ (§. 16.) $(b - m) + q$,

also nach (§. 106.):

$$a - m > b - m.$$

Für (4.):

$m - a = m - (b + q) =$ (§. 17.) $(m - b) - q$

oder (§. 14. n. 7.):

$(m - a) + q = m - b$ folglich (§. 106.):

$$m - a < m - b.$$

Für (5. und 6.):

$a . m = (b + q) . m = bm + qm$ folglich (§. 106.)

$am > bm$ und (§. 32. n. 13.) $m . a > m . b$.

Für (7.):

$a : m = (b + q) : m =$ (§. 39.) $b : m + q : m$

folglich:

$$a : m > b : m.$$

Für (8.): Es kann nicht $m : a = m : b$ seyn; denn dann müßte auch $a = b$ seyn (§. 105. n. 1.); eben so wenig kann $m : a > m : b$ seyn; denn dann wäre auch nach (5.): $(m : a) ab > (m : b) ab$ d. h. (§. 36. und §. 32. n. 15. II.) $mb > ma$ was gegen (6.) ist; folglich kann nur der dritte Fall statt finden, es kann nur $m : a < m : b$ seyn (E. §. 9.).

Für (9.):

$a^m = (b + q)^m =$ (§. 68.) $b^m + mq^{m-1} . b + \ldots$

demnach: $a^m > b^m$.

Für

Für (10.):

$$m^a = m^{b+q} = (\S.\ 61.)\ m^b \cdot m^q = (\S.\ 32.\ n.\ 1.)$$
$$m^b + m^b + \ldots\ldots$$

demnach: $m^a > m^b$.

Für (11.):

Es kann nicht $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ seyn; denn sonst wäre auch $a = b$ (§. 105.); eben so wenig kann $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$ seyn; denn dann wäre auch nach (9.): $(\sqrt[m]{a})^m < (\sqrt[m]{b})^m$ d. h. (§. 60. n. 15. II.) $a < b$; folglich ist nur $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ möglich.

Für (12.):

Es kann nicht $\sqrt[a]{m} = \sqrt[b]{m}$ seyn; denn sonst wäre auch $a = b$ (§. 105.); eben so wenig kann $\sqrt[a]{m} > \sqrt[b]{m}$ seyn, denn sonst wäre auch nach (9.): $(\sqrt[a]{m})^{ab} > (\sqrt[b]{m})^{ab}$ oder (§. 65. und §. 60. n. 15. II.): $m^b > m^a$, was gegen (10.) ist.

Für (13.):

Eben so kann nicht $a ? m = b ? m$ seyn, weil sonst auch $a = b$ seyn müßte; auch kann nicht $a ? m < b ? m$ seyn, denn sonst wäre auch nach (10.): $m^{a ? m} < m^{b ? m}$ oder (§. 60. n. 15. IV.) $a < b$.

 End-

Endlich, für (14.):

Kann nicht $m ? a = m ? b$ seyn, weil dann $a = b$ wäre; und eben so wenig kann $m ? a \rhd m ? b$ seyn, weil sonst nach (12.): $\sqrt[m?a]{m} \lhd \sqrt[m?b]{m}$ oder nach (§. 60. n. 15. V.) $a \lhd b$ seyn müßte, welches jedesmal der Voraussetzung, daß $a \rhd b$ seyn solle, widerspricht.

Daher obige 14 Ungleichungen richtig.

§. 109. Ist endlich

$a \rhd b$ und $m \rhd n$, so ist auch

---

1) $a + m \rhd b + n$ 2) $a \cdot m \rhd b \cdot n$ 3) $a^m \rhd b^n$

4) $a - n \rhd b - m$ 5) $a : n \rhd b : m$

6) $\sqrt[n]{a} \rhd \sqrt[m]{b}$ und 7) $a ? n \rhd b ? m$

denn, man hat nach (§. 108.):

1) $a + m \rhd b + m$ und $b + m \rhd b + n$

2) $a \cdot m \rhd b \cdot m$ und $b \cdot m \rhd b \cdot n$

3) $a^m \rhd b^m$ und $b^m \rhd b^n$

4) $a - n \rhd b - n$ und $b - n \rhd b - m$

5) $a : n \rhd b : n$ und $b : n \rhd b : m$

6) $\sqrt[n]{a} \rhd \sqrt[n]{b}$ und $\sqrt[n]{b} \rhd \sqrt[m]{b}$

7) $a ? n \rhd b ? n$ und $b ? n \rhd b ? m$

folglich nach (§. 107.) obige 7 Ungleichungen richtig.

§. 110. Da wir in den (§§. 103. u. 104.) gesehen haben, daß, wenn eine Gleichung mit einer Zahl, oder zwey Gleichungen mit einander durch die 7 Operazionen verbunden werden, man immer wieder eine neue Gleichung erhält; und die Zahl oder die Gleichung mit der man operirt unendlich verschieden seyn, jede der 7 Operazionen gewählt werden kann, auch von jeder neuen Gleichung dasselbe gilt, was hier von der ursprünglichen Gleichung gesagt wird, so erhellet, daß man aus einer gegebenen Gleichung auf dem angeführten Wege (§. 103. u. 104.) eine unendliche Menge neuer Gleichungen ableiten könne. Hier nun ist die Grenzlinie zwischen der Elementar- und höhern Zahlenlehre; der höhern Zahlenlehre nehmlich kommt es zu, aus gegebenen Gleichungen, nach vorstehenden Prinzipien, andere Gleichungen abzuleiten, die gewissen Zwecken genügen *).



*) Hätte man z. B. die Gleichung $7 . x = 28$, so dividire man selbige durch 7, und man erhält (§. 103.): $\frac{7x}{7} = \frac{28}{7}$ oder (nach §. 32. n. 15. I.) $x = \frac{28}{7} = 4$. Oder, wenn gegeben wäre die Gleichung $2^x = 8$, so logarithmire man selbige durch 2 (§. 103.) und erhält: $(2^x) ? 2 = 8 ? 2$ oder nach (§. 60. n. 15. III.) $x = 8 ? 2 = 3$. Nun ist aber (§. 86. VII.): $8 ? 2 = \frac{8 ? 10}{2 ? 10}$ und in der Folge werden wir sehen, daß dafür auch geschrieben werden könne $\frac{\log 8}{\log. 2}$; dann wird $x = \frac{\log. 8}{\log. 2}$; und dies ist die gewöhnliche Art nach welcher man in dem gege-

Ohnerachtet nun dieses Ableiten neuer Gleichungen aus gegebenen in die höhere Zahlenlehre (Algebra), und nicht hieher gehört, so wollen wir doch eine Gattung von Gleichungen, wegen ihrer häufigen Anwendung in der niedern Raumgrößenlehre (Geometrie) und im gemeinen Leben, hier schon etwas näher betrachten; dies sind die Gleichungen deren beyde Seiten Quozienten sind, und die gewöhnlich unter dem Namen der geometrischen Proporzionen vorgetragen werden.

§. 111. Jede Gleichung wie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder a:b = c:d deren beyde Seiten Quozienten sind, nennt man eine (geometrische) Proporzion. Die Dividenden a und c heißen die Vorderglieder, die Divisoren b und d aber, die Hinterglieder. Man pflegt bey diesen Quozienten gewöhnlich das zweyte Divisionszeichen, nehmlich (:), zu gebrauchen, und sagt deswegen, a sey das erste, b das zweyte, c das dritte und d das 4te Glied, in der so geschriebenen Proporzion a:b = c:d. Auch heißen dann die Glieder a und d die äussern, so wie b und c die mittlern Glieder. Statt zu sagen a durch b dividirt ist gleich c durch d dividirt, sagt man auch lieber: a verhält sich zu b wie c zu d.

Ferner heißt die Proporzion stetig, wenn die beyden mittlern Glieder einander gleich sind; wie

gegebenen Fall x auszudrücken pflegt. In der höhern Zahlenlehre werde ich zeigen, mit welcher Leichtigkeit und Einfachheit dieses Ableiten der Gleichungen nach gewissen Zwecken verrichtet werden kann.

wie a:b = b:c, und wenn man sagt: 3 Zahlen a, b, c stehen in stetiger Proporzion, so versteht man darunter, daß der Quozient a:b der beyden ersten gleich ist dem Quozienten b:c der beyden letzten der gegebenen Zahlen.

Zu §. 111. Heißt es also: Vier Zahlen 8, 4, 18 und 9 stehen in geometrischer Proporzion, so versteht man nichts anders darunter, als daß der Quozient 8:4 der beyden ersten gleich ist dem Quozienten 18:9 der beyden letzten; d. h. $\frac{8}{4} = \frac{18}{9}$ oder 8:4 = 18:9; dabey sind 8 und 9 die äussern, und 4 und 18 die mittlern Glieder; so wie die Dividenden 8 und 18 die Vorderglieder und die Divisoren 4 und 9 die Hinterglieder der Proporzion.

§. 112. Hat man nun die Proporzion

$$a:b = c:d$$

und multiplizirt selbige mit bd (§. 103.), so erhält man (a:b) bd = (c:d) bd oder nach (§ 36. und §. 32. n. 15. II.):

$$\text{I.}\quad ad = bc.$$

Dividirt man diese Gleichung (I.) nach und nach durch a, b, c, d, so erhält man, nach (§. 32. n. 15. I.) und (§. 103.):

$$\text{II.}\quad 1)\ d = \frac{bc}{a} \quad 2)\ \frac{ad}{b} = c \quad 3)\ \frac{ad}{c} = b$$

$$\text{und}\quad 4)\ a = \frac{bc}{d}.$$

Dividirt man ferner die Gleichung (I.) nach und nach durch ab, ac, bd und cd (d. h. durch

alle

alle möglichen Produkte zweyer der 4 Zahlen a, b, c, d, mit Ausnahme der beyden in (I.) vorkommenden ad und bc), so erhält man:

1) $\frac{ad}{ab} = \frac{bc}{ab}$ 2) $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$ 3) $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ und

4) $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$

oder nach (§. 51.):

III. 1) $d:b = c:a$ 2) $d:c = b:a$
3) $a:b = c:d$ 4) $a:c = b:d$

Und da man in jeder dieser 4 Gleichungen, den Quozienten zur rechten mit dem zur linken verwechseln kann:

5) $c:a = d:b$ 6) $b:a = d:c$
7) $c:d = a:b$ und 8) $b:d = a:c$

Unter diesen Gleichungen ist die dritte unsre vorhin angenommene ursprüngliche.

Die Sätze (I. II. III.) pflegt man auf folgende Art wörtlich auszudrücken:

I. In jeder Proporzion $a:b = c:d$, ist das Produkt der beyden äussern Glieder a und d immer gleich dem Produkte der beyden mittlern b und c.

II. In jeder Proporzion $a:b = c:d$, findet man irgend ein äusseres Glied a oder d, wenn man die beyden mittlern Glieder b und c mit einander multiplizirt, und dies Produkt bc durch das andere äussere Glied dividirt; eben

so

so findet man aber auch ein mittleres Glied b oder c, wenn man die beyden äussern a u. d mit einander multiplizirt, und dies Produkt ad durch das andere mittlere Glied dividirt. Diese allgemeine Regel enthält auch die besondere in sich: daß man das 4te Glied finde, wenn man das 2te und 3te mit einander multiplizirt, und dann durch das 1ste dividirt. Endlich

III. Wenn man in einer Proporzion a : b = c : d die Glieder a, b, c, d versetzt, so daß man immer beyde äussere Glieder zugleich äussere bleiben, oder beyde zugleich mittlere Glieder werden läßt, so erhält man jedesmal wieder eine richtige Proporzion. Man sagt dann: die Proporzion werde versetzt, und dies kann immer auf 8 verschiedene Arten geschehen.

Diesen Satz (III.) kann man auch noch auf folgende Art ausdrücken:

Eine Gleichung zwischen zwey Produkten ad = bc, kann man immer in eine Proporzion (d. h. in eine Gleichung zwischen zwey Quozienten) verwandeln, wenn man beliebig die beyden Faktoren des ersten Produkts ad zu äussern oder beyde zu mittlern Gliedern nimmt, dann die beyden Faktoren des andern Produkts bc zu mittlern oder zu äussern.

Anmerk. Ist die Proporzion stetig

a : b = b : c so ist nach (I.):

(C):

(C). $ac = b^2$ und nach (II.):

$$a = \frac{b^2}{c};\ c = \frac{b^2}{a};$$ und indem man die Gleichung (C) durch 2 radizirt, nach (§. 103.) und (§. 60. n. 15. I.):

$$\sqrt[2]{(ac)} = b$$

d. h. in einer stetigen Proporzion findet man das mittlere Glied b, wenn man die äussern Glieder a und c mit einander multiplizirt und dann das Produckt durch 2 radizirt.

§. 113. Solche zwey Glieder einer Proporzion, die nicht beyde zugleich mittlere oder beyde zugleich äussere Glieder sind, heißen **homologe** Glieder; diese sind also, in der Proporzion $a:b = c:d$, a und b, dann a und c, ferner b und d und endlich c und d. Bey dem Versetzen einer Proporzion sind die homologen Glieder derselben, in jeder neuen Proporzion immer wieder homologe Glieder, wie solches aus vorhergehendem unmittelbar erhellet.

§. 114. Hat man $a:b = c:d$, so ist auch nach (§. 51. und 52.):

$$a:b = c:d = an:bn = c.n:d.n$$
$$= (a:n):(b:n) = (c:n):(d:n)$$

oder:

I. $a:b = cn:dn$ und $a:b = \frac{c}{n}:\frac{d}{n}$

auch (§. 112. III.):

a:c

$$a : c = b : d = an : cn = bn : dn$$
$$= (a : n) : (c : n) = (b : n) : (d : n)$$

oder nach (§. 112.):

$$\text{II. } a : bn = c : dn \text{ und } a : \frac{b}{n} = c : \frac{d}{n}$$

u. s. w.; d. h. aus jeder Proporzion $a : b = c : d$ erhält man eine neue Proporzion, wenn man zwey homologe Glieder der gegebenen mit einer und derselben Zahl n multiplizirt oder dividirt.

§. 115. Ist abermals gegeben $a : b = c : d$ so ist auch (§. 103):

$$(a : b) + 1 = (c : d) + 1 \text{ und}$$
$$(a : b) - 1 = (c : d) - 1$$

oder, nach (§. 46. X. und §. 47. XIII.):

$$(a + b) : b = (c + d) : d \text{ und}$$
$$(a - b) : b = (c - d) : d,$$

und (§. 112. III.):

$$(a + b) : (c + d) = b : d = a : c \text{ auch}$$
$$(a - b) : (c - d) = b : d = a : c$$

d. h. in jeder Proporzion $a : b = c : d$, verhält sich die Summe oder Differenz des ersten Vorder- und Hintergliedes a und b, zur Summe oder Differenz des zweyten Vorder- und Hintergliedes c und d, wie das erste Vorderglied a zum zweyten c oder wie das erste Hinterglied b zum zweyten d.

Versetzt man die gegebene Proporzion $a : b = c ; d$ schreibt $a ; c = b : d$, und wendet auf diese den vorhergehenden Satz an, so erhält man:

$$(a + c) : (b + d) = a : b = c : d \text{ und}$$
$$(a - c) : (b - d) = a : b = c : d.$$

d. h. in jeder Proporzion $a : b = c : d$, verhält sich auch die Summe oder Differenz der Vorderglieder a und c zur Summe oder Differenz der Hinterglieder b und d wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied.

Es versteht sich daß man jede dieser Proporzionen nach (§. 112. n. III.) 8 mal versetzen und auf jede alles vorhergehende wiederholt anwenden kann, und daß man auf diese Art aus einer gegebenen Proporzion eine unendliche Menge neuer Proporzionen abzuleiten im Stande ist, von denen wir natürlich nur die einfachsten und wichtigsten herausheben.

Anmerk. Durch mehrfach wiederholte Anwendung des letztern Satzes, läßt sich selbiger auch auf mehrere gleiche Quozienten erweitern. Hat man nehmlich:

$$a : b = c : d = e : f = g : h \text{ so ist auch}$$
$$(a + c + e + g) : (b + d + f + h) = a : b = c : d \text{ etc.}$$

§. 116. Ist gegeben $a : b = c : d$; so ist auch (§. 103.):

$$(a : b)^n = (c : d)^n \text{ und } \sqrt[n]{(a : b)} = \sqrt[n]{(c : d)}$$

oder nach (§. 64. und §. 72.):

$$a^n : b^n = c^n : d^n \text{ und } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

Daher auch:

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2 \text{ und } \sqrt[2]{a} : \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{c} : \sqrt[2]{d}$$

auch $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ und $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$

§. 117. Hat man ferner:

1) $a : b = c : d$
2) $e : f = g : h$
3) $m : n = p : q$
u. s. w.

so ist auch: wenn man diese Gleichungen mit einander multiplizirt (§. 36. §. 48.):

$$a.e.m : b.f.n = c.g.p : d.h.q$$

d. h. wenn man die gleichnamigen Glieder mehrerer Proporzionen mit einander multiplizirt, so stehen die Produkte wieder in Proporzion.

§. 118. Sind aber unter den gedachten Gliedern mehrere, und zwar solche, einander gleich, die in der neuen Proporzion Faktoren homologer Glieder werden, z. B. $c = q$ und $g = d$, so kann man nach (§. 114. und §. 51.) diese gleichen Glieder vor der Multiplikazion gegenseitig weglassen; man hat nehmlich dann: $aem : bfn = p : h$.

Hat man also:

$$a : b = c : x$$
$$d : e = x : y$$
$$f : g = y : z$$

so ist auch $adf : beg = c : z$.

In

In dieser Form aufgestellt heißt gedachter Satz gewöhnlich der Kettensatz.

Anmerk. Als praktische Regel kann man sich überhaupt merken, daß, wenn mehrere solche Proporzionen unter einander geschrieben sind, man nicht nur gedachte gleiche Glieder gegenseitig weglassen darf, sondern daß man auch irgend zwey Glieder, die zu verschiedenen Proporzionen gehören können, wenn sie nur die angeführte Eigenschaft haben, nehmlich nach der Multiplikazion Faktoren homologer Glieder werden, mit einer und derselben Zahl multipliziren oder dividiren könne, und daß dann doch die durch die Multiplikazion der unter einander stehenden Glieder jedesmal sich ergebenden Produckte eine richtige Proporzion bilden; wie solches sogleich aus (§. 114. §. 51. und §. 52.) hervorgeht.

---

Fünf-

## Fünftes Kapitel.

## Von der Bezeichnung der bestimmten Zahlen oder dem sogenannten Zahlensysteme.

§. 119. Bestimmte Zahlen sind diejenigen, bey denen man die Stelle berücksichtigt, die sie in der Zahlenreihe behaupten, (oder, bey denen man auf die Menge ihrer Einheiten Rücksicht nimmt). In so ferne auch diese durch Bilder ausgedrückt werden müssen, so kommt dabey alles darauf an, diese Bilder nach einem gewissen Gesetz dergestalt aus einfachen Bildern zusammenzusetzen, daß man sogleich an dem Bilde die verschiedene Stelle erkennt, welche die damit bezeichnete Zahl in der Zahlenreihe einnimmt.

§. 120. Um diese Forderung zu erfüllen, bedarf es nur folgender

### Aufgabe.

Die Zahlenreihe dergestalt bildlich darzustellen, daß aus dem Bilde einer jeden Zahl, sogleich das Bild der nächst vorhergehenden und nächst folgenden Zahl erkannt werden könne.

### Auflösung.

1) Man bezeichne eine beliebige Anzahl erster Zahlen der Zahlenreihe durch die Zeichen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, z

für welche man auch die Worte hat:

Eins, Zwey, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn,

und

und nenne diese Zeichen, so wie das Zeichen o (Null), Ziffern.

2) Zu dieser letzten Ziffer z addire man alle Ziffern von 1 bis z nach der Ordnung (§. 11.), so bezeichnen die Summen z + 1, z + 2, z + 3, z + 4, ..... z + 9, z + z die weiter folgenden Zahlen der Zahlenreihe.

3) Statt z + z setze man 2 z (§. 32. n. 1. und n. 13.), addire wieder zu 2 z alle Ziffern von 1 bis z, und erhält die Summen 2 z + 1, 2 z + 2, 2 z + 3, ..... 2 z + 9, 2 z + z, wodurch die weiter folgenden Zahlen der Zahlenreihe bezeichnet sind.

4) Eben so setze man nun statt 2 z + z das Produkt 3 z (§ 32. n. 12. und §. 14. n. 4.), und verfahre wie in (nro. 3.) bis man zu 3 z + z gelangt, wofür man 4 z setzt, und nach (nro. 3.) in der Bezeichnung fortfährt, bis man nach und nach die Bilder 4 z + z oder 5 z, .... 6 z, ..... 7 z, ..... 9 z, dann 9 z + 1, 9 z + 2, .... 9 z + 9 und zuletzt 9 z + z erhält; und hat so die fernern Zahlen der Zahlenreihe bildlich ausgedrückt.

5) Da nun 9 z + z = (§. 32. n. 12.) (9 + 1) z = (nro. 1.) z . z = (§. 60. n. 1.) $z^2$ ist, so setze man statt 9 z + z die Potenz $z^2$, und addire hiezu alle in (nro. 1. — 4.) aufgestellten Bilder nach der Reihe, bis man zuletzt zu $z^2 + 9 z + 9$, und zu dem diesem nächstfolgenden Bilde $z^2 + 9 z + z$ oder $z^2 + z^2$ gelangt.

6) Statt $z^2 + z^2$ setze man $2z^2$ und verfahre nach (n. 5.), bis man zu dem Bilde $2z^2 + 9z + 9$ und zu dem diesem nächstfolgenden $2z^2 + z^2$ gelangt, wofür man $3z^2$ setzen und so in der Bezeichnung fortfahren kann, bis man zu $4z^2$, .... $5z^2$, .... $6z^2$, ..... $9z^2$, .... $9z^2 + 9z + 9$ und zu dem diesem nächstfolgenden Bilde $9z^2 + z^2$ kommt; und jedes folgende Bild wird dann auch immer die folgende Zahl ausdrücken.

7) Da nun $9z^2 + z^2 = (9+1)z^2 = z.z^2 =$ (§. 60. n. 6.) $z^3$ ist, so setze man statt $9z^2 + z^2$ die Potenz $z^3$, addire dazu alle in (nro. 1 — 6.) aufgestellten Bilder aller vorhergehenden Zahlen der Zahlenreihe bis man zu $z^3 + z^3$ gelangt.

8) Dafür setze man das Produkt $2z^3$, fahre damit nach (n. 7.) in der Bezeichnung fort, bis man zuletzt durch die Bilder $3z^3$, .... $5z^3$, ..... $9z^3$.... zu $9z^3 + 9z^2 + 9z + 9$ und zu dem diesem nächstfolgenden Bilde $9z^3 + z^3$ kommt, wodurch die Bilder für die ferner folgenden Zahlen der Zahlenreihe aufgestellt sind.

9) Da $9z^3 + z^3 = (9+1)z^3 = z.z^3 = z^4$ ist, so setze man statt $9z^3 + z^3$ die Potenz $z^4$, wiederhole das Verfahren (nro. 7. u. 8.) bis man zu $9z^4 + 9z^3 + 9z^2 + 9z + 9$ und zu dem diesem nächstfolgenden Bilde $z^5$ gelangt; mit dem man dasselbe Verfahren wiederholt und die Bilder $z^6$, .... $z^7$, .... $z^8$, .... rc. rc. erhält; so daß das auf $9z^6 + 9z^5 + 9z^4 + 9z^3 + 9z^2 + 9z + 9$ folgende Bild $z^7$, und allgemein das auf $9z^m + 9z^{m-1} + 9z^{m-2} + \ldots\ldots + 9z^3 + 9z^2 + 9z + 9$

fol-

folgende Bild $z^{m+1}$ ist; und man kann auf diese Art die Bilder aller in's Unendliche fortgehenden Zahlen der Zahlenreihe angeben, so daß jede Zahl nur durch eines dieser Bilder bezeichnet wird, und umgekehrt auch jedes solche Bild nur eine bestimmte Zahl bezeichnet.

Der Beweis, daß vorstehende Auflösung der Aufgabe ein Genüge leiste, fällt sogleich in die Augen, weswegen wir hier dessen weitere Auseinandersetzung übergehen wollen.

§. 121. Eine solche gesetzmäßige bildliche Darstellung der Zahlenreihe, so daß aus dem Bilde einer jeden Zahl, das Bild der ihr zunächst vorhergehenden und zunächst folgenden Zahl angegeben werden kann, heißt ein Zahlensystem, und das so eben aufgestellte, insbesondere das dekadische Zahlensystem, weil dabey zehn ursprüngliche Bilder zu Grunde gelegt wurden.

Anmerk. Es erhellet sogleich, daß bey Auflösung der Aufgabe (§. 120.) die Anzahl der Ziffern willkührlich ist, daß man aber deren nicht zuviel nehmen dürfe, um ihre Folge genau und bestimmt im Gedächtniß behalten und angeben zu können. Nimmt man deren zwey, vier, oder zwölf, so nennt man die sich ergebenden Systeme, das dyadische, tetradische, dodekadische. Das dodekadische wäre vielleicht das bequemste, das dekadische aber ist das gewöhnliche, und daher solches auch hier aufgestellt worden.

§. 122. Das Bild einer bestimmten Zahl ist daher entweder 1) eine Ziffer, wie 4, 6, ꝛc.; oder

2)

2) ein Produkt von z mit (in) einer andern Ziffer, wie $2z$, $7z$ ꝛc.; oder 3) eine Potenz von z, wie $z^3$, $z^2$, $z^7$ ꝛc.; oder 4) ein Produkt aus einer Potenz von z mit (in) einer andern Ziffer, wie $4z^3$, $7z^2$ ꝛc.; oder endlich 5) eine aus den so eben angeführten Bildern durch Addizion entstandene Summe, wie $4z^5 + 9z^2 + 7z + 3$ oder $7z^3 + 2z$ oder $9z^2 + 7$ ꝛc ꝛc. Da aber $z^0 = 1$ und $z^1 = z$, ferner $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ist, so kann man 1) statt der Ziffern von 1 bis 9 auch schreiben die Produkte $1 \cdot z^0$, $2z^0$, $3z^0 \ldots\ldots 9z^0$ und statt z schreiben $1 \cdot z^1$; eben so 2) statt der Produkte $2z$, $7z$, ꝛc. auch schreiben die Produkte $2z^1$, $7z^1$ ꝛc.; endlich 3) statt der Potenzen $z^3$, $z^2$, $z^7$, ꝛc. die Produkte $1z^3$, $1z^2$, $1z^7$ ꝛc.; so daß man also sagen kann: Die Bilder der bestimmten Zahlen sind entweder 1) Produkte aus einer Potenz von z mit einer Ziffer z. B. $4z^0$, $1z^1$, $7z^1$, $1z^3$, $7z^2$, ꝛc. oder 2) Summen aus zwey oder mehreren dieser Produkte, wie $1z^4 + 5z^0$ oder $2z^3 + 7z^2 + 1z^1 + 4z^0$; u. s. w.

§. 123. Einige dieser Bilder der bestimmten Zahlen enthalten, ausser der höchsten Potenz von z, auch noch alle niedrigern bis zur oten Potenz ($z^0$), wie z. B. $2z^3 + 9z^2 + 4z^1 + 7z^0$; andere aber enthalten nur eine oder einige dieser Potenzen, wie z. B. die Bilder $4z^6$, oder $3z^4 + 7z^1$, oder $2z^5 + 3z^2 + 2z^0$; u. s. w.

Aber auch diese letztern können unter die Form der erstern gebracht werden. Da nehmlich $0 \cdot z^m = 0$ und $a = a + 0$ ist (§. 32. n. 4. und §. 14. n. 1.), so

so kann man auch schreiben statt

| der Bilder: | die Bilder: |
|---|---|
| $4z^6$ | $4z^6 + 0z^5 + 0z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z^1 + 0z^0$ |
| $5z^4 + 7z^1$ | $5z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 7z^1 + 0z^0$ |
| $2z^5 + 3z^2 + 2z^0$ | $2z^5 + 0z^4 + 0z^3 + 3z^2 + 0z^1 + 2z^0$ |

so daß also jede bestimmte Zahl durch eine Summe bezeichnet werden kann, deren Summanden Produkte aus einer Ziffer mit (in) einer Potenz von z sind, und von der linken zur rechten zu alle Potenzen von z nach der Reihe, bis zur oten, enthalten.

§. 124. Das so geordnete Bild einer bestimmten Zahl (wenn nehmlich der Summand mit der höchsten Potenz von z am weitesten zur linken steht, und in den zur rechten folgenden Summanden, nach der Reihe, alle niedrigern Potenzen von z bis $z^0$ vorkommen) wie z. B. $2z^3 + 9z^2 + 4z^1 + 7z^0$ bezeichnet man kurz dadurch, daß man die in den einzelnen Summanden vorkommenden Multiplikanden (die immer Ziffern sind), ohne alles Zeichen in ihrer Folge neben einander setzt; man erhält dann das Bild 2947. Demnach schreibt man auch statt

| der Bilder: | die Bilder: |
|---|---|
| $4z^3 + 9z^2 + 1z^1 + 6z^0$ | 4916 |
| $4z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 9z^1 + 0z^0$ | 40090 |
| $1z^3 + 0z^2 + 0z^1 + 0z^0$ | 1000 |
| $1z^2 + 0z^1 + 0z^0$ | 100 |
| $1z^1 + 0z^0$ | 10 |
| $5z^5 + 9z^4 + 2z^3 + 0z^2 + 1z^1 + 6z^0$ | 592016; |

u. s. w.

§. 125.

§. 125. Demnach stehet jedes bloß aus neben einander geschriebenen Ziffern bestehende Bild, wie 53674, statt einer Summe, und vorliegendes statt der Summe $5z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 7z^1 + 4z^0$; und jede einzelne Ziffer in diesem Bilde (z. B. 6) statt eines Produkts ($6z^2$), dessen Multiplikand sie ist, dessen Multiplikator aber eine Potenz von z ist ($z^2$), deren Exponent (2) an der Stelle erkannt wird, um welche diese Ziffer von der am weitesten zur rechten stehenden Ziffer (4) absteht.

Die am weitesten zur rechten stehende Ziffer 4 stehet also statt $4z^0$, die erste zur linken folgende Ziffer 7 statt des Produkts $7z^1$, die zweyte zur linken folgende 6 statt $6z^2$, die dritte zur linken 3 statt $3z^3$, und die vierte zur linken folgende Ziffer 5 statt $5z^4$, u. s. f.

Anmerk. Diese Abkürzung eines Zahlenausdrucks, indem man Zeichen wegläßt, von denen er wesentlich abhängt, wie hier die Addizionszeichen und die Potenzen von z, kann und darf nur da statt finden, wo vermöge einer Uebereinkunft (wie §. 124. und 125. geschehen), aus gewissen Merkmalen, die weggelassenen Zeichen leicht hinzugedacht werden können.

§. 126. Nach (§. 124. §. 32. n. 4. n. 3. §. 14. n. 1. u. §. 60. n. 10. und n. 12.) ist also, (E. §. 7.):

1) $10 = z$
2) $100 = z^2 = 10^2$ (nach 1.)
3) $1000 = z^3 = 10^3$
4) $10000 = z^4 = 10^4$
5) $100000 = z^5 = 10^5$; u. s. w.

d. h. das Bild 10 bezeichnet dieselbe Zahl die auch die Ziffer z bezeichnet (welche Ziffer nach §. 120. n. 1. durch das Wort Zehn ausgesprochen wird); ferner kann man statt der Potenzen von 10 oder ż auch die Bilder setzen, die entstehen, wenn man an 1 zur rechten so viel Nullen anhängt, als der Exponent der Potenz anzeigt.

Anmerk. 1. Weil $10 = z$ ist, so kann man die Ziffer z aus dem Zahlensysteme ganz weglassen und überall das Bild 10 dafür setzen; und dann sagen: das Bild 6237 stehe statt $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ oder statt $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$ (§. 124. und §. 125.). Eben so geht aus (§. 120.) hervor, daß das auf 9 folgende Bild 10, das auf 99 folgende 100, das auf 999 folgende 1000, ferner das auf 9999 folgende 10000, so wie auch das auf 999999 folgende 1000000, u. s. w. seyn wird. Daher ist auch (§. 14. n. 3.): $9 + 1 = 10$, $99 + 1 = 100$, $999 + 1 = 1000$, $9999 + 1 = 10000$, $999999 + 1 = 1000000$; u. s. w.

Anmerk. 2. Da diese Bilder der bestimmten Zahlen immer dieselben Zahlen bezeichnen, also eine unveränderliche Bedeutung haben, so hat man für selbige auch Worte geschaffen; und zwar ganz einfach dadurch, daß man bloß einigen Potenzen von z oder 10 eigene Namen gab. Man hat nehmlich für

| die Bilder: | die Worte: |
|---|---|
| $z^2$ oder $10^2$ oder 100 | Hundert |
| $z^3$ oder $10^3$ oder 1000 | Tausend |
| $z^6$ oder $10^6$ oder 1000000 | Million |

für

| für die Bilder: | die Worte: |
|---|---|
| $z^{12}$ oder $10^{12}$ oder 1000000000000 | Billion |
| $z^{18}$ oder $10^{18}$ | Trillion |
| u. s. w. | u. s. w. |
| $z^{600}$ oder $10^{600}$ | Centillion. |

Da $z^4 = z \cdot z^3$; $z^5 = z^2 \cdot z^3$; $z^7 = z \cdot z^6$; $z^{11} = z^5 \cdot z^6$, u. s. w. ist, so hat man dann auch statt

| der Bilder | die Worte: |
|---|---|
| $z^4$ od. $10^4$ od. 10000 | Zehntausend |
| $z^5$ od. $10^5$ od. 100000 | Hunderttausend |
| $z^7$ od. $10^7$ od. 10000000 | Zehn Millionen |
| $z^{11}$ od. $10^{11}$ od. 100000000000 | Hunderttausend Millionen. |
| u. s. w. | u. s. w. |

Das Bild 427 (das statt $4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$ stehet) spricht man dann aus: Vier mal Hundert und zwey mal Zehn und Sieben (§. 11. und §. 29.). Eben so 430076: Vier mal Hunderttausend und Drei mal Zehntausend und Sieben mal Zehn und Sechs. Und umgekehrt, die Worte: Neun mal Zehntausend, vier mal Tausend, drei Hundert und Zwey drücken die Zahl aus die durch das Bild $9 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2$ oder nach (§. 124.) durch 94302 bezeichnet wird.

Mehr in die Sprachlehre als hieher gehört die Bemerkung, daß man statt Zehn und Eins (11) lieber Eilf, statt Zehn und Zwey (12) lieber Zwölf, statt Zwey mal Zehn, Drei mal Zehn, Vier mal Zehn 2c. Neun mal

Zehn

Zehn lieber Zwanzig, Dreißig, Vierzig ꝛc. Neunzig sagt; daß man ferner, wenn die Zahl aus zwey Ziffern besteht, die kleinere Zahl zuerst setzt, und wenn die andere Zehn ist, das Wort und ganz wegläßt. So sagt man statt Zehn und Drei lieber Dreizehn, statt Zehn und Neun lieber Neunzehn, statt Zwanzig und Drei lieber Drei und Zwanzig; u. s. w.

§. 127. Eine bestimmte Zahl (eigentlich das Bild einer bestimmten Zahl E. §. 5. Anmerk.) heißt einziffrig, zweyziffrig, dreiziffrig ꝛc. mehrziffrig, wenn sie aus einer, zwey, drei oder überhaupt aus mehreren neben einander geschriebenen Ziffern besteht.

§. 128. Jede Potenz von z oder 10 heißt eine Einheit der sovielten Ordnung als der Exponent angiebt; so sind also die Potenzen $10^3$ oder 1000, $10^5$ oder 100000, $10^m$ ꝛc. Einheiten der 3ten, 5ten, mten Ordnung; die absolute Einheit (E. §. 1.) selbst (weil $1 = 10^0$ ist) eine Einheit der oten Ordnung.

§. 129. Die Produkte, deren Multiplikanden beliebige bestimmte Zahlen, deren Multiplikatoren aber Einheiten irgend einer Ordnung sind, nennt man Zahlen dieser Ordnung; so heißen z. B. die Produkte $34 . 10^3$, $427 . 10^2$, $7 . 10^5$ ꝛc. resp. Zahlen der 3ten, 2ten, 5ten Ordnung. Diese Ordnung-Zahlen heißen einziffrig, zweyziffrig, mehrziffrig, je nachdem die Multiplikanden, ein- zwey- oder mehrziffrig sind. Eine einziffrige Zahl irgend einer Ordnung heißt

ins-

insbesondere eine Ziffer dieser Ordnung. z. B. $4 \cdot 10^5$, $7 \cdot 10^2$, ꝛc. ꝛc.

Die Ziffern der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Ordnung nennt man auch noch die Ziffern der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender ꝛc.

§. 130. Die Ordnung einer Einheit oder einer Zahl ist also immer dem Exponenten der Potenz von 10 gleich, und sie heißt höher oder niedriger, je nachdem dieser eine höhere (größere) oder niedrigere (kleinere) Zahl ist.

Anmerk. Es ist:

1) $427 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ und

2) $427 \cdot 10^5 =$ (§. 33. und §. 61.) $4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5$

d. h. 1) jede mehrziffrige Zahl ist eine Summe von Ziffern verschiedener Ordnungen, bis zur 0ten Ordnung; 2) jede mehrziffrige Zahl irgend einer (z. B. der 5ten) Ordnung ($427 \cdot 10^5$) ist einer Summe von Ziffern gleich, deren am weitesten zur rechten stehende von derselben (5ten) Ordnung ist, die übrigen nach der linken zu folgende aber, nach der Reihe, von höheren Ordnungen sind.

§. 131. In jeder bestimmten Zahl z. B. 72985, ist die Ordnung irgend einer Ziffer z. B. 9 um 1 höher als die Ordnung der zunächst zur rechten stehenden Ziffer 8, und um 1 niedriger als die der zunächst zur linken stehenden Ziffer 2. Die Ordnung einer jeden weiter zur rechten folgenden Ziffer wird daher gefunden, wenn man von der Ordnung

nung der zur linken zunächst vorhergehenden Ziffer, 1 subtrahirt.

§. 132. Bezeichnet man nun in einer bestimmten Zahl z. B. 985, die Ziffer der 0ten Ordnung (5) durch ein ihr zur rechten gesetztes Komma, schreibt diesem Komma zur rechten noch mehrere Ziffern z. B. 4637, und läßt alles, was im vorhergehenden für die Bilder bestimmter Zahlen geltend gemacht wurde, auch für das so entstehende Bild 985,4637 gelten, so ist nach (§. 131.) die Ordnung der Ziffer 4 durch $0 - 1 = -1$ (§. 26.), die Ordnung der Ziffer 6, durch $(-1) - 1 = -2$, die Ordnung der Ziffer 3, durch $(-2) - 1 = -3$, die Ordnung der Ziffer 7, durch $(-3) - 1 = -4$, u. s. w. ausgedrückt; d. h. das Bild 985,4637 steht statt $9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$.

Diese zur rechten der Ziffer der 0ten Ordnung stehende Ziffern heißen daher Ziffern der negativen Ordnungen, während man die zur linken derselben Ziffer stehenden, Ziffern der positiven Ordnungen nennt.

§. 133. Da nun $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$ (§. 101. n. 2.) und $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ rc. ist, so ist $985,4637 = 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{7}{10000}$; und es drücken also die zur rechten des Komma stehenden Ziffern Brüche aus.

Jedes solche, die Form einer bestimmten Zahl habende Bild, wie 685,4637 heißt ein Decimalbruch; so wie die zur rechten des Komma befindlichen Ziffern, Decimalstellen (oder bloß Decimalen) genannt werden.

§. 134. Man nennt nun jedes nach dem Zahlensysteme geordnete Bild, es mag eine (ganze) Zahl oder einen Bruch bezeichnen, eine bestimmte Zahl im weitern Sinne; und diese Bedeutung werden wir in folgendem immer zu Grunde legen.

Eine bestimmte Zahl ist daher entweder 1) eine ganze Zahl oder 2) ein Decimalbruch.

Anmerk. So oft in der Folge von einer einziffrigen Zahl die Rede ist, ohne daß dabey die Ordnung derselben angegeben wäre, so ist immer eine Ziffer der oten Ordnung (eine unter den ersten 9 Zahlen enthaltene Zahl) verstanden.

§. 135. In jeder bestimmten Zahl pflegt man die Ordnung einer jeden Ziffer mittelst der Ziffer der oten Ordnung zu bestimmen, weswegen man bey einem aus Ziffern geschriebenen Bilde wissen muß, welche Ziffer von der oten Ordnung ist, um dadurch die Bedeutung desselben erkennen zu können. Ist die bestimmte Zahl eine ganze Zahl, so ist diese Ziffer der oten Ordnung jedesmal die am weitesten zur rechten stehende (z. B. 7 in dem Bilde 4237) und gewöhnlich nicht besonders durch ein Komma bezeichnet; ist aber die bestimmte Zahl ein Decimalbruch, so ist die Ziffer der oten Ordnung

nung jedesmal durch ein zur rechten derselben gesetztes Komma bezeichnet (wie z. B. die Ziffer 5 in dem Bilde 25,0796).

§. 136. In jeder bestimmten Zahl kann man am weitesten zur rechten und am weitesten zur linken der Ziffer der 0ten Ordnung Nullen anhängen und weglassen, so viel man nur immer will, ohne dadurch die Bedeutung der bestimmten Zahl zu ändern; denn diese Nullen ändern die Bedeutung der übrigen Ziffern nicht (§. 135.) und als Summanden auch nicht die Summe (§. 14. n. 1.). So ist z. B.

427 = 00427 = 427,00 = 000427,0000; u. s. w.

eben so

93,762 = 93,7620000 = 0093,762 = 0093,7620, u. s. w.

Zu §. 136. Man darf hier nicht übersehen, daß die Ziffer der 0ten Ordnung immer erkennbar seyn muß. Hat man also eine ganze Zahl z. B. 427 und will zur rechten Nullen anhängen, die die Bedeutung des Bildes nicht ändern, so muß man die Ziffer 7 der 0 ten Ordnung deutlich durch ein Komma angeben, muß schreiben 427,0000. Eben so kann man von dem Bilde 6200, die Nullen zur rechten nicht weglassen, ohne die Bedeutung des Bildes zu ändern, weil nur die der Ziffer der 0ten Ordnung zur rechten stehende Nullen weggelassen werden dürfen. Hätte man daher das Bild 6200,000 so könnte man dafür setzen 6200.

Anmerk. Der Allgemeinheit wegen denke man sich auch bey jeder ganzen Zahl, die Ziffer der 0ten Ordnung durch ein Komma bezeichnet, und jedesmal

mal am weitesten zur linken und rechten desselben die Stellen, so weit man sie braucht, durch Nullen ausgefüllt. Z. B. statt 427 denke man sich ....00427,000.... statt 9,706 denke man sich ...009,70600...

§. 137. Es ist: $(4 . 10^5) . 10^3 =$ (§. 36. und §. 61.) $4 . 10^{5+3} = 4 . 10^8$ (§. 11. u. §. 120. n. 1.); d. h. wenn man eine Ziffer irgend einer Ordnung (z. B. $4 . 10^5$) mit einer Einheit der 3ten Ordnung ($10^3$) multiplizirt, so erhält man dieselbe Ziffer, aber von der um 3 höhern Ordnung. Ferner ist: $(4 . 10^5) . 10^{-3} =$ (§. 101. n. 2.) $(4 . 10^5) : 10^3$ $=$ (§ 41. und §. 62.) $4 . 10^{5-3} = 4 . 10^2$ (§. 12. und §. 120. n. 1.); d. h. wenn man eine Ziffer irgend einer Ordnung mit einer Einheit der (—3)ten Ordnung multiplizirt, oder durch eine Einheit der 3ten Ordnung dividirt, so erhält man dieselbe Ziffer, aber von der um 3 niedrigern Ordnung.

§. 138. Rückt man in einer bestimmten Zahl z. B. 49876,4013 das Komma um 3 Stellen zur rechten, so erhält man wieder eine bestimmte Zahl 49876401,3 in welcher die Ziffer 6, die vorher von der 0ten Ordnung war, jetzt von der 3ten Ordnung ist. So wie aber die Ordnung dieser Ziffer, so ist auch dadurch die Ordnung jeder andern Ziffer um 3 erhöbt (§. 131.), folglich jede Ziffer, mithin auch die ganze bestimmte Zahl mit $10^3$ oder 1000 multiplizirt (§. 137. u. §. 33.), oder $49876,4013 \times 1000 = 49876401,3$.

Rückt man dagegen das Komma um 3 Stellen zur linken, giebt 49,8764013, so ist jetzt die

Ziffer

Ziffer 6 von der (—3)ten Ordnung, folglich ihre Ordnung und dadurch auch die Ordnung einer jeden der übrigen Ziffern um 3 niedriger als vorher (§. 131.); demnach jede Ziffer, und also auch die ganze bestimmte Zahl mit $10^{-3}$ multiplizirt oder mit $10^3$ oder 1000 dividirt (§. 39. u. §. 137.); d. h. $(49876{,}4013) \times 10^{-3} = \frac{49876{,}4013}{1000} = 49{,}8764013$.

Anmerk. 1. Es erhellet sogleich, daß das in (§. 137. und §. 138.) gesagte auch allgemein gelten müsse, wenn man statt der Einheit der dritten Ordnung eine Einheit irgend einer andern Ordnung setzt. Die Regeln des vorhergehenden Paragraphen, allgemein ausgedrückt, sind daher folgende: Eine bestimmte Zahl wird mit einer Einheit der mten Ordnung ($10^m$, einer 1 nebst m Nullen zur rechten) multiplizirt, wenn man das Komma um m Stellen zur rechten rückt, durch dieselbe Einheit aber dividirt, oder mit $10^{-m}$ multiplizirt, wenn man das Komma um m Stellen zur linken rückt. So ist z. B.

$$42{,}97064 \times 10000 = 429706{,}4$$
$$842{,}9706 : 100 = 8{,}429706.$$

Anmerk. 2. Sind zur linken oder zur rechten nicht so viel Stellen als das Komma verrückt werden soll, oder ist die gegebene Zahl eine ganze Zahl, so muß man die (Anmerk. §. 136.) zu Hülfe nehmen, und hat z. B.

$43 \times 1000 =$ (§. 136.) $\ldots 0043{,}0000 \ldots \times 1000$
$=$ (Anm. 1) $\ldots 0043000{,}0 \ldots =$ (§. 136.) $43000$.

$43 : 1000 =$ (§. 136.) $\ldots 000043{,}00 \ldots : 1000$
$=$ (Anm. 1.) $\ldots 000{,}04300 \ldots =$ (§. 136.) $0{,}043$.

Eben

Eben so:

$0,07 \times 10000 = 700$; $0,07 : 10000 = 0,000007$
$7 . 10^{-3} = 7 : 1000 = 0,007$; $7 . 10^{3} = 7 . 1000 = 7000$.

Anmerk. 3. Statt der allgemeinen Regel (Anmerk. 1.) kann man für ganze Zahlen noch folgende besondere aufstellen:

1) Eine ganze Zahl wird mit einer Einheit der mten Ordnung ($10^m$, einer 1 nebst m Nullen zur rechten) multiplizirt, wenn man selbiger zur rechten m Nullen anhängt. Z. B. $43 . 100 = 4300$; $629 . 10000 = 6290000$; $1000 . 100 = 100000$; u. s. w.

2) Eine ganze Zahl wird durch eine Einheit der mten Ordnung ($10^m$) dividirt, oder mit einer Einheit der (—m)ten Ordnung ($10^{-m}$) multiplizirt, indem man um m Stellen zur linken ein Komma macht; hat sie nicht so viele Stellen zur linken, so muß man dann Nullen anhängen; z. B.

$$437 : 100 = [437 . 10^{-2} =] \; 4,37.$$

$$\frac{49}{1000} = [49 . 10^{-3} =] \; 0,049$$

$$\frac{4007}{10000} = [4007 . 10^{-4} =] \; 0,4007$$

$$4200950 : 100 = 42009,5;$$ u. s. w.

§. 139. Es ist dem zu Folge auch:

$$47,9843 = 479843 . 10^{-4} = \frac{479843}{10000};$$

d. h. jeder Decimalbruch 47,9843 ist 1) einem Produkte gleich, dessen Multiplikand 479843 entsteht,

steht, wenn man das Komma wegläßt, dessen Multiplikator $10^{-4}$ aber eine Einheit der so vielten negativen Ordnung ist, als die Zahl der Decimalen anzeigt; oder 2) einem Bruche gleich dessen Dividend so eben erwähnter Multiplikand 479843, und dessen Divisor eine Einheit der so vielten positiven Ordnung ist, als die Zahl der Decimalen bestimmt. So ist z. B.

$$0{,}0427 = 427 \cdot 10^{-4} = \frac{427}{10000}$$

$$9000{,}05 = 900005 \cdot 10^{-2} = \frac{900005}{100}$$

$$0{,}004007 = 4007 \cdot 10^{-6} = \frac{4007}{1000000}$$

§. 140. Nach (Anmerk. 1. §. 126.) ist jede Einheit einer höhern Ordnung um 1 größer als eine aus lauter Neunen aller niedrigern, bis zur 0ten Ordnung, folglich auch größer als jede aus andern Ziffern dieser niedrigern Ordnungen, geschriebene Zahl; z. B. $10000 > 2347$, auch $> 9005$, auch $> 8979$; u. s. w. ferner ist: $9999 \cdot 10^5 = 9 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5$, nach (§. 130. Anmerk.); und addirt man hiezu $10^5$ so erhält man: $9999 \cdot 10^5 + 10^5 =$ (§. 32. n. 12.) $(9999 + 1) 10^5 =$ (§. 126. Anmerk. 1.) $10^4 \cdot 10^5 = 10^9$ d. h. jede Einheit einer höhern Ordnung z. B. $10^9$ ist um eine Einheit einer beliebigen niedrigern Ordnung z. B. $10^5$ größer als die aus lauter 9 aller niedrigern bis zu dieser (5ten) Ordnung bestehende Summe $9 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5$, demnach auch größer als jede aus andern Ziffern derselben Ordnungen bestehende Summe.

Hier-

Hieraus folgt:

1) Wenn in einer bestimmten Zahl irgend eine Ziffer um 1 erhöht wird, und statt aller zur rechten stehenden Ziffern Nullen gesetzt werden, so ist die neu entstandene Zahl größer als die gegebene. Es ist z. B. $4823 < 4900$; $271998756 < 272000000$; u. s. w.

2) Wenn man in einem Decimalbruch eine Decimalstelle um 1 erhöht, die übrigen zur rechten aber alle wegläßt, so ist der neu entstandene Decimalbruch größer als der gegebene. Z. B. $47{,}96428 < 47{,}97$; $4{,}0099879 < 4{,}01$.

3) Erhöhet man in einem Decimalbruch die Ziffer der 0ten Ordnung um 1 und läßt alle Decimalen weg, so ist die entstehende ganze Zahl größer als der gegebene Decimalbruch. Z. B. $47{,}9748 < 48$.

4) Jede Einheit der 0ten Ordnung ist größer als jede Summe von Decimalstellen, so viel man deren auch nehmen mag. Z. B. $1 > 0{,}4987$; $1 > 0{,}9989675$, u. s. w.

---

Sech-

## Sechstes Kapitel.

## Von der Addizion und Subtrakzion bestimmter Zahlen.

§. 141. Bestimmte Zahlen addiren heißt ihre Summe (§. 11.) in ein nach dem Zahlensysteme geordnetes Bild zu verwandeln. Dieses Bild heißt dann die Summe der bestimmten Zahlen.

§. 142. Aufgabe 1.

Zwey einziffrige Zahlen 8 und 5 zu addiren.

Auflösung.

Man nehme die eine Zahl 8, gehe in der Zahlenreihe um so viel Stellen weiter als die andere Zahl 5 anzeigt, und die daselbst befindliche Zahl 13 ist die gesuchte Summe (nehmlich das nach dem Zahlensysteme geordnete Bild, welches der Summe $8 + 5$ gleich ist).

Beweis erhellet unmittelbar.

Anmerk. Um die Addizion mehrziffriger Zahlen schnell und leicht zu verrichten, ist es nöthig, die Summe zweyer einziffriger Zahlen sogleich angeben zu können, welches man nach einiger Uebung mit Hülfe des Gedächtnisses bewerkstelligt. Auch kann man folgende Tabelle, die man das Eins und Eins nennen könnte, zu Hülfe nehmen:

Eins

## Eins und Eins.

Summanden

| Summanden | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Der Gebrauch dieser Tabelle ist folgender: Man suche den einen Summanden 8 in der ersten Vertikalreihe, den andern Summanden 5 in der ersten Horizontalreihe; wo nun die Horizontalreihe des ersten und die Vertikalreihe des zweyten einander begegnen, findet sich die gesuchte Summe 13.

**Anmerk. 2.** Aus dieser Tabelle erhellet zugleich, daß die Summe zweyer einziffriger Zahlen entweder selbst einziffrig, oder, wenn zweyziffrig, doch nie größer als 18 ist.

§. 143. Es ist $a . 10^m + b . 10^m =$ (§. 33.) $(a + b) 10^m$ d. h. zwey Zahlen der m ten Ordnung $a . 10^m$ und $b . 10^m$ werden addirt, wenn man die Zahlen a und b addirt, und die Summe $a + b$ in die m te Ordnung setzt.

So ist z. B. $4 . 10^5 + 3 . 10^5 = 7 . 10^5$ und $8 . 10^4 + 5 . 10^4 = 13 . 10^4 = 1 . 10^5$

$+ 4 \cdot 10^4$. Wird also die Summe der Zahlen zweyziffrig (wie hier 13) so ist die Ziffer 3 zur rechten immer von derselben Ordnung, von der die Summanden sind, die 1 zur linken aber von der nächsthöhern Ordnung.

## §. 144. Aufgabe. 2.

Zwey mehrziffrige bestimmte Zahlen zu addiren.

### Auflösung.

1) Man schreibe sie dergestalt unter einander daß die Ziffer der oten Ordnung (Einer) oder die Kommata und dann alle Ziffern gleicher Ordnungen unter einander zu stehen kommen, und mache unterhalb einen Horizontalstrich.

2) Man fange nun am weitesten zur rechten an und addire die unter einander stehenden Ziffern. Ist die Summe einziffrig, so setze man sie in dieselbe Stelle unterhalb des Horizontalstrichs; wenn zweyziffrig, setze man bloß die Ziffer zur rechten hin, und behalte die 1 zur linken im Gedächtniß.

3) Dann gehe man zu dem nächsten Paare von Ziffern zur linken, addire diese und nehme im zweyten Falle der vorigen (nro.) die im Gedächtniß behaltene 1 hinzu, verfahre übrigens wie vorher.

4) So gehe man von Stelle zu Stelle weiter, bis man zu dem letzten zur linken stehenden Paare von Ziffern gelangt, mit denen man dasselbe Verfahren (n. 3.) wiederholt.

5) Die Summe des letzten Paares von Ziffern schreibe man ganz hin, wenn ausserdem zur linken

ken

ken nicht noch Ziffern des einen Summanden stehen; in diesem Falle nehmlich schreibe man nur die Ziffer zur rechten hin, zähle die 1 zur linken zu der nächstfolgenden einzelnen Ziffer hinzu, und schreibe das Resultat in dieselbe Stelle unterhalb des Horizontalstrichs.

6) Stehen endlich zur rechten oder zur linken einzelne Ziffern, so schreibe man auch diese noch in ihre Stellen unterhalb des Striches hin.

7) Die Ziffer, die bey der Addizion der Ziffern der 0ten Ordnung hingeschrieben wurde, nehme man ebenfalls als Ziffer der 0ten Ordnung, so hat man die verlangte Summe.

Beyspiele:

| | 1) | 2) | 3) |
|---|---|---|---|
| | 42376 | 42376 | 347,45 |
| | 85943 | 943 | 32,8765 |
| Sum̃e | = 128319 | = 43319 | = 380,3265 |

| | 4) | 5) |
|---|---|---|
| | 473 | 72305,90973 |
| | 0,796 | 70,084 |
| Summe | = 473,796 | = 72375,99373 |

Beweis. Jede bestimmte Zahl ist eine Summe von Ziffern verschiedener Ordnungen (§. 130. Anmerk.); und zwey bestimmte Zahlen werden daher addirt indem man die Summanden beliebig vereinigt (§. 14. n. 6.). Da aber die Summe zweyer Ziffern von einerlei Ordnung immer entweder eine Ziffer oder eine Zahl (nicht größer als 18) von derselben Ordnung und im letztern Fall die Ziffer zur rechten von derselben Ordnung die 1 zur linken aber von der nächsthöhern Ordnung ist (§. 143.)

 so

so erhellet 1) daß man diese 1 immer zur Summe der zur linken zunächst folgenden Ziffern nach (§. 143.) addiren könne, 2) daß die unterhalb des Horizontalstrichs kommenden Ziffern nach der Reihe ebenfalls von auf einander folgenden Ordnungen sind, also eine nach dem Zahlensysteme gebildete Summe ausmachen, die der Summe der beyden gegebenen Zahlen gleich ist; welches nachzuweisen war. (§. 141.).

Anmerk. 1. Auf dieselbe Art kann man auch mehrere mehrziffrige Zahlen addiren.

Anmerk. 2. Sollen Ziffern verschiedener, aber auf einander folgender Ordnungen addirt werden, so darf man selbige bloß so neben einander schreiben, daß zur rechten irgend einer Ziffer, immer die Ziffer der nächstniedrigern Ordnung zu stehen kommt; und dann die Ziffer der oten Ordnung angeben. Hieher gehört obiges 4te Beyspiel. Dann auch $4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 = 74000$; $4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^2 = 2649$; u. s. w. Hätte man aber mehrziffrige Zahlen verschiedener Ordnungen zu addiren, so müßte man sie dergestalt unter einander schreiben, daß die Ziffern gleicher Ordnungen unter einander zu stehen kommen, und dann nach (§. 144.) die Addizion verrichten.

Anmerk. 3. Wäre also der folgende Summand von einer um 1 höhern Ordnung als der vorhergehende, so müßte man selbigen um eine Stelle zur linken einrücken; wenn er aber von einer um 1 niedrigern Ordnung wäre, müßte solcher um eine Stelle zur rechten über den vorhergehenden herausgerückt werden, um nach (Anmerk. 2.) die Addizion verrichten zu können.

§. 145.

§. 145. Man sagt: zwey bestimmte Zahlen werden von einander subtrahirt, wenn man ihre Differenz (§. 12.) in ein nach dem Zahlensystem geordnetes Bild verwandelt. Dieses Bild heißt dann auch die Differenz der bestimmten Zahlen.

§. 146. Aufgabe. 1.

Eine einziffrige Zahl (5) von einer andern größern einziffrigen (9) oder von einer zweyziffrigen Zahl (13) deren Ziffer der 0ten Ordnung (3) kleiner als der Subtrahend (5) ist, zu subtrahiren.

Auflösung.

Man nehme den Subtrahenden (5) gehe in der Zahlenreihe fort bis man zum Minuenden (13) kommt; und die Anzahl der Stellen um die man fortgeht (8) ist die gesuchte Differenz [eigentlich das nach dem Zahlensystem geordnete Bild welches der Differenz 13 — 5 gleich ist. (§. 12. u. E. §. 7.)]; wie ohne weiteres erhellet.

Anmerk. Man kann sich zur Lösung dieser Aufgabe auch des Eins und Eins (§. 142. Anmerk.) bedienen. Man sucht nehmlich den Subtrahenden (5) in der ersten Horizontalreihe; in der dazu gehörigen Vertikalreihe geht man bis zum Minuenden (13), und dann in der dazu gehörigen Horizontalreihe zur linken bis zur ersten Vertikalreihe und trifft dort die gesuchte Differenz 8.

§. 147. Es ist: $52 = 5 \cdot 10 + 2$, daher $52 - 3 = (5 \cdot 10 + 2) - 3 = (4 \cdot 10 + 10 + 2) - 3 = (4 \cdot 10 + 12) - 3 =$ (§. 16. Anmerk.) $4 \cdot 10 + (12 - 3) =$ (§. 146.) $4 \cdot 10 + 9 = 49$ d. h.

d. h. wenn von irgend einer zweyziffrigen Zahl (52) eine einziffrige (3), die größer ist als die Ziffer der 0ten Ordnung des Minuenden, subtrahirt werden soll, so vermindere man die nächste Ziffer zur linken (5) um 1, verbinde selbige mit der ersten Ziffer (2) dekadisch (giebt 12), subtrahire den Subtrahenden (3) von dieser Zahl (12, giebt 9) und setze zur linken die nach der Verminderung übrig behaltene Ziffer (4, giebt 49), so hat man die gesuchte Differenz.

§. 148. Es ist:

$$a.10^m - b.10^m = (\S. 34.)(a-b).10^m;$$

d. h. zwey Zahlen der mten Ordnung $a.10^m$ und $b.10^m$ werden von einander subtrahirt, wenn man die Zahlen a und b von einander subtrahirt, die Differenz a – b aber in die mte Ordnung setzt. So ist z. B. $13.10^3 - 4.10^3 = 9.10^3$; u. s. w.

§. 149. Aufgabe. 2.

Zwey mehrziffrige Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung.

1) Man schreibe den Minuenden hin und den Subtrahenden darunter nach (§. 144. n. 1.), und mache unterhalb einen Horizontalstrich.

2) Stehen am weitesten zur rechten nicht zwey Ziffern unter einander, so fülle man die leeren Stellen durch Nullen aus, bis solches statt findet (§. 136.).

(Zu 2. In den Beyspielen ist solches immer durch Punkte angedeutet.

3) Man

3) Man fange nun am weitesten zur rechten an, subtrahire die untere Ziffer von der obern (nach §. 146.) oder, wenn die obere kleiner ist als die untere, nach (§. 147.), und setze die Differenz in dieselbe Stelle darunter.

4) Dann gehe man zu dem zunächst zur linken stehenden Paare von Ziffern, verfahre wie in (nro. 3.), vergesse aber nicht, daß, wenn bey der vorhergehenden Subtrakzion der zweyte Fall (nro. 3.) statt fand, die obere Ziffer um 1 vermindert ist.

5) So fahre man, nach der linken zu gehend, von Stelle zu Stelle fort, bis man zum Paare von Ziffern am weitesten zur linken gelangt ist.

6) Im Falle, daß die oben stehende Ziffer, die um 1 vermindert werden soll, eine 0 ist, oder gar zur linken noch mehrere Nullen stehen, so vermindere man die erste auf die Nullen zur linken folgende verschiedene Ziffer (statt der Null) um 1, und denke sich die Stellen der Nullen mit Inbegriff derjenigen, die vermindert werden sollte, mit Neunen ausgefüllt.

7) Ist die obenstehende Ziffer des letzten Paares kleiner als die untere, so muß ihr zur linken noch eine Ziffer stehen (weil sonst der Minuend kleiner seyn würde, als der Subtrahend), die dann um 1 vermindert, nebst allen übrigen noch zur linken stehenden in ihre Stellen herab gesetzt werden.

8) Die Ziffer, welche als Differenz der Ziffern der 0ten Ordnung hervorgieng, nehme man wieder zur Ziffer der 0ten Ordnung, bezeichne sol-

solche nöthigenfalls durch ein Komma, und man hat so die gesuchte Differenz.

Beyspiele:

$$1)\ \begin{array}{r} 47985 \\ 9832 \\ \hline \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} 427352 \\ 192829 \\ \hline \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} 427352 \\ 4196 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diff.} = 38153 \qquad \text{Diff.} = 234523 \qquad \text{Diff.} = 423156$$

$$4)\ \begin{array}{r} 46700048 \\ 2879296 \\ \hline \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r} 4320 \\ 472 \\ \hline \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{r} 420000 \\ 19724 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diff.} = 43820752 \qquad \text{Diff.} = 3848 \qquad \text{Diff.} = 400276$$

$$7)\ \begin{array}{r} 479{,}8476 \\ 45{,}32\,.\,. \\ \hline \end{array} \qquad 8)\ \begin{array}{r} 479{,}8476 \\ 98{,}96\,.\,. \\ \hline \end{array} \qquad 9)\ \begin{array}{r} 4087{,}408\,.\,.\,. \\ 749{,}274346 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diff.} = 434{,}5276 \qquad \text{Diff.} = 380{,}8876 \qquad 3338{,}133654$$

Beweis. Es ist (§. 124. u. 125.):

$$479{,}8476 = 4.10^{2} + 7.10 + 9 + 8.10^{-1} + 4.10^{-2} + 7.10^{-3} + 6.10^{-4} \text{ und}$$

$$98{,}96 = 9.10 + 8 + 9.10^{-1} + 6.10^{-2}$$

Soll nun letztere Summe von ersterer subtrahirt werden, so kann man die Summanden gleicher Ordnungen (also die nach (n. 1. der Aufl.) unter einander geschriebenen Ziffern) von einander subtrahiren (nach §. 148.), und diese Differenzen dann addiren (§. 21. Anmerk.). Da aber diese Differenzen immer Ziffern derselben Ordnung sind (§. 148.), so werden solche addirt, indem man sie bloß neben einander setzt (§. 144 Anmerk. 2.). Die noch übrigen Summanden des Minuenden bleiben unverändert, werden also in ihre Stellen herabgesetzt, und das unterhalb des Horizontalstrichs zu stehen kommende Resultat ist dann ein nach dem Zahlensy-

stem

stem geordnetes Bild, welches der Differenz der beyden gegeben n Zahlen gleich ist.

Im Betreff der (nro. 6.) aber (die durch das 4te und 6te Beyspiel erläutert ist) bemerke man, daß dort 7 eine Ziffer der 5ten Ordnung ist, daß eine 1, die man dort wegnimmt, eine Einheit der 5ten Ordnung, also $10^5$ ist, daß endlich nach (§. 140.) $10^5 = 9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10^1$, so daß dann die Stellen der 4ten, 3ten, 2ten Ordnung mit Neunen ausgefüllt, statt der nächsten Ziffer 4 der ersten Ordnung aber 10 + 4 oder 14 zu stehen kommt.

Man sieht leicht, daß das, was hier der Deutlichkeit wegen an einem Beyspiele gezeigt wurde, auch allgemein für jedes andere statt finden müsse.

---

Sieben-

## Siebentes Kapitel.

# Von der Multiplikazion und Division bestimmter Zahlen.

§. 150. Zwey bestimmte Zahlen mit einander multipliziren heißt, ihr Produkt (§. 29.) nach dem Zahlensysteme bilden; das entstehende Bild heißt dann das Produkt der bestimmten Zahlen.

§. 151. Aufgabe. 1.

Zwey einziffrige Zahlen mit einander zu multipliziren. Z. B. 8 mit 5.

### Auflösung.

Man addire nach (§. 142. und §. 144.) die Zahl 8 zu 8, zu der Summe nochmals 8 und so fort, bis man die Summe von 5 Summanden $8+8+8+8+8$ nach dem Zahlensystem ausgedrückt hat; das Bild 40, welches man erhält, ist das gesuchte Produkt. (§. 29.)

Anmerk. 1. Dasselbe Verfahren könnte man auch anwenden um zwey mehrziffrige Zahlen mit einander zu multipliziren. Da es aber höchst beschwerlich und mühsam wird, so bald der Multiplikator nur einiger Massen groß z. B. 9 oder gar zwey- oder mehrziffrig ist, so kürzt man selbiges nach dem in den folgenden (§. §.) beschriebenen Wege ab.

An-

Anmerk. 2. Um Fertigkeit in der Multiplikazion bestimmter Zahlen zu erlangen, ist es nothwendig die Produkte zweyer einziffriger Zahlen schnell angeben zu können. Dies geschieht mit Hülfe des Gedächtnisses oder einer Tabelle, wie die nachstehende ist, und die man Ein mal Eins nennt.

Ein mal Eins.

Faktoren.

| Faktoren | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Der Gebrauch dieser Tabelle ist mit der gehörigen Abänderung derselbe, wie bey der Tabelle (§. 142. Anmerk. 1.)

Man bemerkt zugleich daß das Produkt zweyer einziffriger Zahlen nie $>$ 81 ist.

§. 152. Es ist nach (§. 36. und §. 61.):

1) $(a \cdot 10^m) \cdot (b \cdot 10^n) = (ab) \cdot 10^{m+n}$

2) $(a \cdot 10^m) \cdot b = (ab) \cdot 10^m$

3) $a \cdot (b \cdot 10^n) = (ab) \cdot 10^n$;

d. h. 1) Eine Zahl der m ten Ordnung $a \cdot 10^m$ wird mit einer Zahl der n ten Ordnung $b \cdot 10^n$ multiplizirt, wenn man die Zahlen a und b mit einander

ander multiplizirt, und das Produkt ab in die $(m+n)$te Ordnung setzt. So ist $(8 \cdot 10^{-3})(9 \cdot 10^{-4}) = 72 \cdot 10^{-7}$ oder (§. 138. u. §. 139.): $0{,}008 \times 0{,}0009 = 0{,}0000072$.

2) Eine Zahl der m ten Ordnung $a \cdot 10^m$ wird mit einer Zahl b (der o ten Ordnung) multiplizirt, wenn man die Zahlen a und b mit einander multiplizirt, und das Produkt ab in dieselbe m te Ordnung setzt. So ist z. B. $(8 \cdot 10^3) \cdot 7 = 56 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3$.

3) Eine Zahl a (der o ten Ordnung) wird mit einer Zahl der n ten Ordnung $b \cdot 10^n$ multiplizirt, wenn man die Zahlen a und b mit einander multiplizirt, und das Produkt in dieselbe n te Ordnung setzt. So ist z. B. $7 \cdot (8 \cdot 10^1) = 56 \cdot 10^1 = 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1$.

§. 153. Aufgabe. 2.

Eine mehrziffrige ganze Zahl mit einer einziffrigen zu multipliziren.

Auflösung.

1) Man setze den Multiplikanden hin, den Multiplikator darunter und mache unterhalb einen Horizontalstrich.

2) Man multiplizire alle einzelne Ziffern des Multiplikanden, nach der Reihe, von der am weitesten zur rechten anfangend, mit dem Multiplikator, und setze die Produkte, wenn sie einziffrig sind, in dieselbe Ordnung unterhalb des Horizontalstrichs; sind sie aber zweyziffrig, so schreibe man die Ziffer zur rechten hin, und nehme die zur linken zu dem nächsten Produkt hinzu.

3) Die

3) Die unterhalb des Horizontalstriches stehende bestimmte Zahl ist dann das gesuchte Resultat.

Beyspiele:

| | |
|---|---|
| 976043 | 98425 |
| 7 | 6 |
| Produkt = 6832301 | Produkt = 590550 |

Beweiß. Da jede bestimmte Zahl 98425 eine Summe ist (§. 130. Anmerk.), so wird sie mit einer Zahl 6 multiplizirt (nach §. 33.) indem man jede einzelne Ziffer multiplizirt, und dann die Produkte addirt.

Indem aber jede zur linken folgende Ziffer des Multiplikanden von einer um 1 höhern Ordnung als die der nächstvorhergehenden ist, so ist auch jedes neue Produkt von einer um 1 höhern Ordnung als die des nächstvorhergehenden Produkts (§. 152. n. 2.). Wären daher die Produkte bloß einziffrig, so dürfte man sie nur neben einander schreiben, indem sie dann schon addirt wären (§. 144. Anmerk. 2.). Sind aber einige oder alle diese Produkte zweyziffrig, so sind sie zwar von derselben Ordnung wie die Ziffer des Multiplikanden (§. 152. n. 2.) aber nach (§. 130. Anmerk.) eine Summe von zwey Ziffern, wovon die zur rechten von derselben die zur linken von der nächsthöhern Ordnung ist; weswegen in diesem Falle nur die Ziffer zur rechten hingesetzt, die zur linken aber zum nächsten Produkt, welches von derselben nächsthöhern Ordnung ist, addirt wird.

§. 154. Aufgabe. 3.

Zwey mehrziffrige ganze Zahlen mit einander zu multipliziren.

Auf-

## Auflösung.

1) Man setze den Multiplikanden hin, den Multiplikator darunter, und mache unterhalb einen Horizontalstrich.

2) Multiplizire dann den Multiplikanden nach und nach mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplikators, indem man mit der am weitesten zur rechten stehenden den Anfang macht; setze die Produkte in ihrer Folge unter einander, doch so, daß jedes folgende um eine Stelle weiter zur linken gerückt wird, und addire selbige so wie sie unter einander stehen (§. 144. Anmerk. 3.), so hat man das verlangte Produkt.

Beyspiel:

```
             470964
                785
          ---------
            2354820
           3767712
          3296748
          ---------
Produkt = 369706740
```

Beweis. Der Multiplikator ist eine Summe, folglich geschieht die Multiplikazion nach (§. 35. n. 1.), indem man den Multiplikanden mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplikators multiplizirt, und dann die Produkte addirt. Da aber jede folgende Ziffer des Multiplikators von einer um 1 höhern Ordnung als die der nächstvorhergehenden Ziffer ist, so ist auch jedes folgende Produkt von einer um 1 höhern Ordnung als das nächstvorhergehende (§. 152. n. 3.); muß also bey der Addizion um eine Stelle weiter zur linken gerückt werden (§. 144. Anmerk. 3.); welches zu erweisen war.

§. 155.

§. 155. Aufgabe. 4.

Zwey Decimalbrüche mit einander zu multipliziren.

Auflösung.

Man lasse (oder denke sich) die Kommata weg, multiplizire die dadurch entstehenden ganzen Zahlen mit einander und schneide im Produkt, von der rechten zur linken Hand, so viele Decimalstellen ab, als die beyden Faktoren deren zusammengenommen haben.

| Beyspiele: | 47,0496 | 0,043705 |
|---|---|---|
| | 0,023 | 0,00023 |
| | 1411488 | 131115 |
| | 940992 | 87410 |
| Produkt = | 1,0821408 | 0,00001005215 |

Beweis ergiebt sich unmittelbar aus (§. 139. n. 1. §. 152. n. 1. §. 27. n. 5. und §. 138. oder §. 139.)

§. 156. Eine bestimmte Zahl durch eine andere bestimmte Zahl dividiren heißt, ein nach dem Zahlensysteme geordnetes Bild finden, welches dem Quozienten der beyden gegebenen Zahlen gleich ist (§. 30. und E. §. 7.). Dieses Bild heißt dann auch der Quozient der bestimmten Zahlen.

§. 157. Aufgabe. 1.

Eine einzlffrige oder zweyziffrige Zahl durch eine einziffrige zu dividiren, wenn der Dividend nicht größer als das 9 fache des Divisors ist (z. B. 56 durch 7).

Auf-

### Auflösung.

Man multiplizire (§. 151.) den Divisor (7) mit allen Ziffern von 1 bis 9 und suche unter den Produkten (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63) das gegebene, so ist der dazu gebrauchte Faktor (8) der gesuchte Quozient (§. 30.).

Anmerk. 1. Wäre der Dividend nicht unter den Produkten enthalten (wenn z. B. 59 durch 7 dividirt werden sollte), so wäre dieß ein Beweis, daß es keine ganze Zahl giebt, die dem Quozienten (59:7) gleich ist. In diesem Falle sucht man gewöhnlich diejenige Ziffer, die dem Quozienten am nächsten kommt, aber kleiner ist, weswegen man nur unter oben gedachten Produkten dasjenige aufsuchen darf, welches der gegebenen Zahl zunächst vorhergeht (dieß ist 56 folglich der nächstkleinste Quozient dieselbe Ziffer 8).

Anmerk. 2. Auch hier kann man sich der Tabelle (§. 151. Anmerk. 2.) (Ein mal Eins) bedienen, da die einzelnen Horizontalreihen dieser Tabelle die oben erwähnten Produkte einer jeden Ziffer, die alle in der ersten Vertikalreihe zu finden sind, nach der Reihe, enthalten.

§. 158. Es ist nach (§. 48. §. 41. §. 62.):

$$1)\ \frac{a.10^m}{b.10^n} = \left(\frac{a}{b}\right).\frac{10^m}{10^n} = \left(\frac{a}{b}\right).10^{m-n}$$

$$2)\ \frac{a.10^m}{b} = \left(\frac{a}{b}\right).10^m$$

d. h. 1) Eine Zahl der m ten Ordnung $a.10^m$ wird durch eine Zahl der n ten Ordnung $b.10^n$ di-

vidirt, wenn man die Zahlen a und b durch einander dividirt und den Quozienten in die (m — n)te Ordnung setzt. Z. B. $72 \cdot 10^5 : 8 \cdot 10^2 = 9 \cdot 10^3$ oder $7200000 : 800 = 9000$.

2) Eine Zahl der m ten Ordnung $a \cdot 10^m$ wird durch eine Zahl b dividirt, wenn man die Zahlen a und b durch einander dividirt, den Quozienten $\frac{a}{b}$ aber in dieselbe m te Ordnung setzt. Z. B. $72 \cdot 10^3 : 8 = 9 \cdot 10^3$ oder $72000 : 8 = 9000$.

§. 159. Aufgabe. 2.

Eine beliebige ganze Zahl (z. B. 40313509) durch eine andere beliebige ganze Zahl (z. B. 4936) zu dividiren.

Auflösung.

1) Man setze den Dividenden hin, mache zur linken und rechten desselben Vertikalstriche und setze zur linken den Divisor;

2) Multiplizire den Divisor mit allen Ziffern von 1 bis 9, stelle diese Produkte tabellarisch hin, und setze zur Seite eines jeden den treffenden Faktor.

Zu 2. Am bequemsten ist es, diese Produkte, wie im Beispiel geschehen, unterhalb des Divisors zu schreiben und statt des erstern, das 1 zum Faktor hat, den Divisor selbst zu nehmen und den Faktor 1 ihm zur linken zu setzen.

3) Man nehme nun von der linken zur rechten zu gehend so viele Ziffern des Dividenden als deren der Divisor hat, oder, wenn die dadurch ausgedrückte Zahl kleiner als der Divisor wäre, noch eine Ziffer mehr (also hier 40313).

4) Suche unter den Vielfachen des Divisors das gedachter Zahl nächstkleinste (39488) setze sol-

 ches

ches darunter und subtrahire; den zur linken des genommenen Vielfachen befindlichen Faktor (8) setze man zur rechten des zweyten Vertikalstrichs als erste Ziffer des Quozienten.

5) Zum Rest (825) setze man die nächste Ziffer (5) des Dividenden herab (giebt 8255) und verfahre ganz nach (nro. 4.) setze aber den Faktor (1) zur rechten der vorhin gefundenen Ziffer (8), als zweyte Ziffer des Quozienten.

6) So fahre man fort, eine neue Ziffer des Dividenden herabzusetzen und jedesmal nach (n. 4.) eine neue Ziffer des Quozienten zu finden und hinzuschreiben, bis man die letzte Ziffer des Dividenden herabgesetzt und dazu die letzte Ziffer des Quozienten gefunden und hingesetzt hat, so hat man zur rechten des Vertikalstrichs den gesuchten Quozienten. Bleibt noch zuletzt ein Rest (wie hier 1197), so setze man den Divisor 4936, durch das Divisionszeichen getrennt, darunter und addire diesen Bruch noch zu der erhaltenen ganzen Zahl (8167) hinzu (§. 11.).

Beyspiel.

| | Divisor | Dividend | Quozient |
|---|---|---|---|
| × 1. | 4936 | 40313509 | $8167 + \frac{1197}{4936}$ |
| × 2. | 9872 | 39488 : : : | |
| × 3. | 14808 | 3255 : : | |
| × 4. | 19744 | 4936 : : | |
| × 5. | 24680 | 33190 : | |
| × 6. | 29616 | 29616 : | |
| × 7. | 34552 | 35749 | |
| × 8. | 39488 | 34552 | |
| × 9. | 44424 | 1197 | |

Beweis. 1) Jedes der unterhalb des Divisors genommenen Produkte (z. B. 29616) kam beym Subtrahiren (unterhalb des Dividenden) um eine Stelle weiter zur rechten, ist also von einer um 1 niedrigern Ordnung als das (unterhalb des Dividenden) zunächst vorhergehende Produkt (4936).

2) Es ist einerlei, ob man von einer Zahl nach und nach mehrere andere einzeln, oder die Summe der Subtrahenden auf einmal subtrahirt (§. 17.).

3) Der Dividend (40313509) ist daher eine Summe aus der Summe aller unter ihm stehender subtrahirter Produkte, auf ihre verschiedenen Ordnungen Rücksicht nehmend, und dem Rest (1197), nehmlich:

| | | |
|---|---|---|
| 39488 | . . | 1tes Produkt |
| 4936 | . . | 2tes — |
| 29616 | . . | 3tes — |
| 34552 | . . | 4tes — |
| 1197 | . . | Rest. |

Summe = 40313509 = Dividend.

4) Um daher den Quozienten zu erhalten muß man nach (§. 39.) jedes dieser Produkte nebst dem Rest dividiren und die Quozienten dann addiren. Diese Quozienten sind aber jedesmal die neben den Produkten (unterhalb des Divisors) stehenden Faktoren, und da die Produkte nach der Reihe von auf einander folgenden niedrigern und das letzte von der 0ten Ordnung ist, so sind auch nach (§. 158. n. 2.) diese Quozienten von auf einander folgenden niedrigern Ordnungen und der letzte von der 0ten Ordnung, und werden daher addirt, indem man sie in ihrer Folge neben einander schreibt (§. 144. Anmerk. 2.). Daß bey dem Reste die Di-

 sion

vision und Addizion nach (§. 30. u. §. 11.) geschehen kann, fällt sogleich in die Augen. Welches zu erweisen war.

Anmerk. 1. Die unterhalb des Divisors hingesetzten Produkte kann man auch entbehren, wenn man die gehörige Uebung sich erworben hat, den Faktor, ohne viele Versuche nöthig zu haben, gerade zu zu nehmen; man multiplizirt dann erst den Divisor mit diesem Faktor (Ziffer des Quozienten) und subtrahirt das erhaltene Produkt (bey welchem man aber immer erst nachzusehen hat, ob es nicht zu groß, besonders aber, ob es nicht zu klein ist).

Anmerk. 2. Aus dem Beweis erhellet: 1) daß man nach jeder Subtrakzion zu dem Reste eine folgende Ziffer des Dividenden herabsetzen müsse, daß man aber auch jedesmal nur eine Ziffer herabsetzen dürfe; 2) daß zu jeder herabgesetzten Ziffer auch jedesmal eine neue Ziffer des Quozienten gefunden und hingesetzt werden müsse. — Sollte daher, nach einer herabgesetzten Ziffer, der Minuend doch noch kleiner seyn als der Divisor, so ist das ihm nächstkleinste unter den Produkten = 0, also auch der Quozient 0; die man dann hinschreibt, und sogleich, nachdem eine neue Ziffer des Quozienten herabgesetzt ist, die Operazion fortsetzt. Z. B.

| Divisor | Dividend | Quozient |
|---|---|---|
| 39 | 3082971 | 79050 $+ \frac{21}{39}$. |
| | 273 : : : : | |
| | 352 : : : | |
| | 351 : : : | |
| | 197 : | |
| | 195 : | |
| | 21 | |

§. 160. In den Beyspielen der vorhergehenden Aufgabe und der Anmerk. 2., wo zuletzt Reste geblieben sind, ist die Aufgabe eigentlich nicht vollständig gelöst, indem der Quozient nach dem Zahlensystem gebildet seyn soll, diese Forderung aber zwar bey dem ersten Theil (der ganzen Zahl) nicht aber bey dem zweyten (dem Bruche) erfüllt ist. Um in diesen Fällen die Aufgabe vollständig zu lösen, bezeichne man die Ziffer der 0ten Ordnung des Quozienten durch ein ihr zur rechten gesetztes Komma, hänge an den Rest statt einer herunterzusetzenden Ziffer des Dividenden jedesmal eine Null, und setze die Division vollkommen so, wie solche (§. 159.) angegeben wurde, fort.

Beyspiel:

| | | Divisor | Dividend | Quozient |
|---|---|---|---|---|
| × | 1. | 625 | 26945 | 43,112 |
| × | 2. | 1250 | 2500: | |
| × | 3. | 1875 | 1945 | |
| × | 4. | 2500 | 1875 | |
| × | 5. | 3125 | --700 | |
| × | 6. | 3750 | 625 | |
| × | 7. | 4375 | -750 | |
| × | 8. | 5000 | 625 | |
| × | 9. | 5625 | 1250 | |
| | | | 1250 | |
| | | | 0000 | |

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet sogleich aus dem Beweis der Aufgabe (§. 159.) sobald man bedenkt, daß der Dividend 26945 auch geschrieben werden könne 26945,000 (§. 136.),

daß

daß also die als Subtrahenden auf einander folgenden Produkte 2500, 1875, 625, 625, 1250, nach der Reihe von der 1 ten, 0 ten, (—1)ten, (—2)ten, (—3)ten Ordnung sind, daß daher auch die Quozienten 4, 3, 1, 1, 2, nach der Reihe von denselben Ordnungen seyn müssen (§. 158. n. 2.).

§. 161. Man kann daher auch eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren; nur darf nicht übersehen werden, daß der erste Quozient (die Ziffer der 0 ten Ordnung) allemal = 0 ist, und daß, nachdem diese hingesetzt und durch ein Komma bezeichnet ist, erst eine Null angehängt und die Division nach (§. 159.) fortgesetzt werden darf. Sey z. B. 39 durch 3125 zu dividiren:

| Divisor | Dividend | Quozient |
|---|---|---|
| 3125 | 39 | 0,01248 |
| | 390 | |
| | 3900 | |
| | 3125 | |
| | 7750 | |
| | 6250 | |
| | 15000 | |
| | 12500 | |
| | 25000 | |
| | 25000 | |
| | 00000 | |

dahero $\frac{39}{3125}$ = 0,01248. Dieser und der vorhergehende Paragraph lehren daher, wie man einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt.

§. 162. In den vorhergehenden Beyspielen brach die Division von selbst ab, indem zuletzt kein Rest mehr blieb. Es kann aber kommen, daß immer noch ein Rest bleibt, man mag das Geschäft fortsetzen, so weit man nur immer will; und in diesem Falle kann der Quozient nicht vollständig dekadisch angegeben werden; wo man abbricht, muß man den letzten Bruch, (der erhalten wird indem man den Rest zum Zähler den Divisor aber zum Nenner nimmt) mittelst des Zeichens (+) mit dem bis daher nach dem Zahlensysteme gebildeten Quozienten verbinden; wobey man aber nicht vergessen darf, daß der letzte Rest immer von derselben Ordnung ist, als das letzte subtrahirte Produkt, oder als die letzte Ziffer des Quozienten.

| Divisor | Dividend | Quozient |
|---|---|---|
| 39 | 357 | 9,1538 |
| | 351 | |
| | 60 | |
| | 39 | |
| | 210 | |
| | 195 | |
| | 150 | |
| | 117 | |
| | 330 | |
| | 312 | |
| | 18 | |

Hier hätte man die Division abbrechen können bey dem ersten Rest 6, bey dem zweyten 21, dritten 15, vierten 33, und fünften 18, u. s. w. und hätte erhalten die Quozienten

9 +

$$9 + \frac{6}{39} = 9{,}1 + \frac{21}{39}10^{-1} = 9{,}15 + \frac{15}{39}10^{-2}$$
$$= 9{,}153 + \frac{33}{39}10^{-3} = 9{,}1538 + \frac{18}{39}10^{-4}.$$

Anmerk. In der Anwendung der Zahlenlehre zur Vergleichung zweyer Dinge bestimmter Art, drückt jede solche Form, wie $\frac{1}{10000}$ auf ein Ding (z. B. Linie) als Einheit bezogen, ein wirkliches Ding aus, das entsteht, wenn man die Einheit in 10000 Theile theilt. Die zur Einheit genommene Größe mag aber seyn, welche sie will, so läßt sich selbige doch immer in eine gewisse und zwar solche Anzahl von Theilen theilen, daß ein Theil gegen die Einheit selbst ausser Acht gelassen werden kann. In der Anwendung kann man daher jene Produkte $\frac{18}{39} \cdot 10^{-4}$ (§. 162.) weglassen, und statt des wahren Quozienten bloß diese

9; 9,1; 9,15; 9,153; 9,1538 ꝛc. ꝛc. nehmen,

die sich dem wahren Quozienten desto mehr nähern, je mehr man Decimalstellen nimmt; und man kann immer nur nach der Einheit auf die sich der fragliche Quozient bezieht, und nach der mehr oder mindern Genauigkeit, die man in der Rechnung verlangt, beurtheilen, bis zu wieviel Decimalstellen man die Division fortsetzen müsse, um dann den noch bleibenden Rest als unbedeutend weglassen zu können.

§. 163. Aufgabe. 3.

Zwey Decimalbrüche durch einander zu dividiren.

Auf-

Auflösung.

Man lasse (oder denke sich) die Kommata weg und dividire die so entstehenden ganzen Zahlen durch einander; dann aber subtrahire man die Anzahl der Decimalen des Divisors von denen des Dividenden, und setze im Quozienten das Komma um so viel Stellen zur linken als diese Differenz anzeigt.

Beweis erhellet aus (§. 139. §. 158. n. 1. und §. 27.) unmittelbar.

Anmerk. 1. Der Dividend muß also mehr oder wenigstens eben so viel Decimalen haben als der Divisor. Da nun die Division der ganzen Zahlen zuletzt einen Rest lassen kann, so thut man in einem solchen Falle am besten, sogleich an den Dividenden zur rechten eine Anzahl Nullen anzuhangen (§. 136.), und die Division bis zur letzten fortzusetzen. Nach (Anmerk. §. 162.) wird man dann bey irgend einer Decimalstelle den Rest als unbedeutend weglassen können.

Anmerk. 2. So wie wir bisher Summen, Differenzen, Produkte und Quozienten in nach dem Zahlensysteme geordnete Bilder verwandelt haben, eben so kann man auch jeden aus einfachen bestimmten Zahlbildern mittelst der vorhergehenden 4 Operazionen beliebig zusammengesetzten Ausdruck, in ein nach dem Zahlensysteme geordnetes Bild verwandeln; indem man die Operazionen einzeln nach dem vorhergehenden und diesem Kapitel in der Ordnung verrichtet, wie das Bild solches ausdrückt (§. 59.). Man sagt in diesem Falle, der gegebene Ausdruck werde bestimmt (oder auch berechnet).

---

Achtes

## Achtes Kapitel.

## Von der Potenzirung, Radikazion und Logarithmazion bestimmter Zahlen.

§. 164. Eine bestimmte Zahl mit einer andern bestimmten Zahl potenziren heißt, ihre Potenz (§. 56.) nach dem Zahlensystem bilden; das erzeugte Bild heißt dann die Potenz der bestimmten Zahlen.

§. 165. Aufgabe. 1.

Eine einziffrige Zahl (z. B. 8) mit einer einziffrigen (5) zu potenziren.

Auflösung.

Man multiplizire 8 mit 8 nach (§. 151. und §. 154.) (giebt 64). Dann dieses Produkt (64) wieder mit 8 u. s. w. bis man das Produkt 8 . 8 . 8 . 8 . 8 in ein nach dem Zahlensystem geordnetes Bild verwandelt hat, so ist solches (nehmlich 32768) die gesuchte Potenz; wie aus (§. 164. und §. 56.) unmittelbar erhellet.

Anmerk. 1. Eben so verfahre man, um zwey mehrziffrige Zahlen mit einander zu potenziren. Man bemerkt indeß sogleich, daß dieß Verfahren höchst mühsam wird, sobald der Exponent nur einigermassen groß ist. Einige Abkürzung desselben findet man in dem Satze (§. 61.), nach welchem man hat: $a^2 . a^2 = a^4$; $a^4 . a^4 = a^8$; $a^8 . a^8 = a^{16}$; $a^{16} . a^{16} = a^{32}$; $a^{32} . a^{32} = a^{64}$ ꝛc. Soll also a mit

73 potenzirt werden, so bestimmt man erstlich auf vorstehende Art $a^{64}$ und hat dann $a^{73} = a^{64}.a^{8}.a$, welches Produkt, da die Faktoren bestimmt sind, leicht bestimmt werden kann (§. 163. Anmerk. 2.).

Anmerk. 2. Um die Potenzen zweyer einziffriger Zahlen schnell und leicht angeben zu können, kann man sich folgender Tabelle bedienen, die man Eins zur Eins nennen dürfte.

## Eins zur Eins.

Dignanden / Exponenten

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 | 65536 | 262144 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 | 78125 | 390625 | 1953125 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 | 279936 | 1679616 | 10077696 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 | 823543 | 5764801 | 40353607 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 | 134217728 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 | 387420489 |

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem des Eins und Eins und Ein mal Eins ähnlich. Man findet sogleich aus ihr $7^5 = 16807$, $6^8 = 1679616$; u. s. w.

§. 166. Es ist nach (§. 63. und §. 65.)

$$(a \cdot 10^m)^n = a^m \cdot 10^{mn}$$

d. h. eine Zahl der mten Ordnung $a \cdot 10^m$ wird mit einer Zahl n potenzirt, wenn man die Zahl a potenzirt, und die Potenz $a^n$ in die (mn)te Ordnung setzt. So ist z. B. $(4 \cdot 10^2)^3 = 64 \cdot 10^6$, oder $400^3 = 64000000$ u. s. w.

Daher auch:

$$(a \cdot 10^{-p})^n = a^n \cdot 10^{-np} \text{ und}$$
$$(4 \cdot 10^1)^5 = 4^5 \cdot 10^5,$$

d. h. jede Zahl der ersten Ordnung $4 \cdot 10^1$ mit einer Zahl 5 potenzirt giebt dasselbe, als wenn man die Zahl 4 mit 5 potenzirte, die Potenz aber in die 5te Ordnung setzte.

§. 167. Aufgabe. 2.

Eine zweyziffrige ganze Zahl (z. B. 47) mit einer einziffrigen (z. B. 5) zu potenziren.

Vorbereitung. Jede bestimmte Zahl ist eine Summe; und da der Satz (§. 68.) lehrt, wie man eine Summe potenzire, so wird derselbe zur Auflösung vorstehender Aufgabe angewandt werden können. Setzt man, der deutlichern Uebersicht wegen, statt m nach und nach 2, 3 rc., so erhält man folgende besondere Formeln:

1)

$$1)\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$2)\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$3)\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$4)\ (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

u. s. w.

## Auflösung.

1) Man nehme unter den aus (§. 68.) entwickelten Formeln der Vorbereitung diejenige, die zur linken den gegebenen Exponenten (5) hat (nehmlich die 4te).

2) Dann setze man statt a die erste Ziffer (4), statt b aber die zweyte zur rechten stehende (7), und berechne die zur rechten des Gleichheitzeichens stehenden Glieder, setze selbige in ihrer Ordnung dergestalt unter einander, daß jedes folgende um eine Stelle weiter zur rechten zu stehen kömmt und addire sie, so wird das Resultat dieser Addizion die verlangte Potenz seyn.

$$a^5 = 4^5 = 1024$$
$$5 \cdot a^4 \cdot b = 5 \cdot 4^4 \cdot 7 = 5 \cdot 256 \cdot 7 = 8960$$
$$10 \cdot a^3 \cdot b^2 = 10 \cdot 4^3 \cdot 7^2 = 10 \cdot 64 \cdot 49 = 31360$$
$$10 \cdot a^2 \cdot b^3 = 10 \cdot 4^2 \cdot 7^3 = 10 \cdot 16 \cdot 343 = 54880$$
$$5 \cdot a \cdot b^4 = 5 \cdot 4 \cdot 7^4 = 5 \cdot 4 \cdot 2401 = 48020$$
$$b^5 = 7^5 = 16807$$
$$47^5 = 229345007$$

Beweis ergiebt sich unmittelbar aus (§. 130. Anmerk. §. 68. §. 166. und §. 144. Anmerk. 3.)

Noch einige Beyspiele:

1) Sey $87^2$ zu bestimmen.

Es

Es ist (Vorbereit. n. 1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, folglich

$$\begin{array}{rcccl} a^2 & = & 8^2 & = & 64 \\ 2ab & = & 2 \cdot 8 \cdot 7 & = & 112 \\ b^2 & = & 7^2 & = & 49 \\ \hline & & 87^2 & = & 7569 \end{array}$$

2) Sey $59^3$ zu bestimmen.

Es ist (Vorbereit. nro. 2.)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

demnach für $a = 5$, $b = 9$;

$$\begin{array}{rcccl} a^3 & = & 5^3 & = & 125 \\ 3a^2b & = & 3 \cdot 5^2 \cdot 9 & = & 675 \\ 3ab^2 & = & 3 \cdot 5 \cdot 9^2 & = & 1215 \\ b^3 & = & 9^3 & = & 729 \\ \hline & & 59^3 & = & 205379 \end{array}$$

Anmerk. Da $479 = 47 \cdot 10 + 9$ ist, so wird man auf demselben Wege auch die 3ziffrige Zahl 479 mit einer beliebigen Zahl potenziren können, indem man die ersten beyden Ziffern 47 statt a und die letzte Ziffer 9 statt b setzt.

§. 168. Aufgabe. 3.

Einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl zu potenziren, z. B. 4,05 mit 11.

Auflösung.

Man lasse (oder denke sich) das Komma weg, potenzire die so entstehende ganze Zahl (405) mit dem gegebenen Exponenten (11); multiplizire dann die Anzahl (2) der Decimalen des Dignanden mit dem Exponenten (11, giebt 22), und setze in der

vor-

vorhin gefundenen Potenz das Komma um so viel Stellen zur linken als dieß Produkt (22) bestimmt, so hat man das verlangte Resultat.

Beweis ergiebt sich unmittelbar aus (§. 139. und §. 166.)

Anmerkung. Die Formel (§. 73.) $a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$, die uns lehren könnte, wie man eine Zahl a mit einem Bruche (m:n) (also auch mit einem Decimalbruch) potenzire, verweist auf die Radikazion.

§. 169. Eine bestimmte Zahl durch eine bestimmte Zahl radiziren, heißt ihre Wurzel (§. 57.) nach dem Zahlensystem bilden; das so entstehende Bild heißt dann die Wurzel der bestimmten Zahlen.

§. 170. Aufgabe. 1.

Eine ganze Zahl, die nicht mehr Ziffern als der Wurzel-Exponent Einheiten hat, durch eine einziffrige Zahl zu radiziren (z. B. 512 durch 3).

Auflösung.

Man nehme die Ziffern von 1 bis 9, potenzire solche nach der Reihe mit dem Wurzel-Exponenten, bis man eine Potenz erhält, die dem gegebenen Radikanden (512) gleich ist; die Ziffer (8), bey welcher dies statt findet, ist die gesuchte Wurzel; wie aus (§. 57.) erhellet.

Anmerk. 1. Man kann sich zur Lösung vorliegender Aufgabe auch der (§. 165. Anmerk. 2.) angeführten Tabelle (Eins zur Eins) und zwar auf folgende Art bedienen:

Man

Man suche den Wurzelexponenten 3 in der ersten Horizontalreihe (Reihe der Exponenten); in der dazu gehörigen Vertikalreihe gehe man herab bis man den Radikanden 512 findet; gehe dann in der zu diesem gehörigen Horizontalreihe zur linken fort bis man zur ersten Vertikalreihe kommt, und findet dort die gesuchte Wurzel (8).

Anmerk. 2. Ist die gesuchte Wurzel keine (ganze) Zahl, sondern bloße Form, z. B. $\sqrt[3]{519}$, so pflegt man gewöhnlich die nächstkleinste ganze Zahl für die Wurzel zu wünschen. Diese findet man, wenn man unter den in der Tabelle in derselben Vertikalreihe befindlichen Potenzen (hier Radikanden) den nächstkleinsten 512 statt des gegebenen 519 nimmt.

§. 171. Es ist (nach §. 71. §. 73.):

$\sqrt[m]{(a.10^n)} = (\sqrt[m]{a}).10^{m:n}$ dahero

$\sqrt[2]{(a.10^n)} = (\sqrt[2]{a}).10^{n:2}, \sqrt[3]{(a.10^n)} = (\sqrt[3]{a}).10^{n:3}$ rc.

d. h. eine Zahl der nten Ordnung $a.10^n$ wird durch eine Zahl m (2, 3) radizirt, wenn man die Zahl a durch sie radizirt und die Wurzel in die n:m (oder n:2, n:3)te Ordnung setzt. So ist z. B. $\sqrt[3]{(512.10^6)} = 8.10^{6:3} = 8:10^2$ oder $\sqrt[3]{512000000} = 800$; eben so $\sqrt[2]{(49:10^8)} = 7.10^{8:2} = 7.10^4$, oder $\sqrt[2]{4900000000} = 70000$; u. s. w.

§. 172.

§. 172. Aufgabe. 2.

Eine drei- oder vierziffrige Zahl (z. B. 7569) durch 2 zu radiziren.

Auflösung.

1) Man nehme aus (§. 167. Vorbereit.) die Formel (nro. 1.)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

2) Setze den Radikanden hin, und schneide von der rechten zur linken zwey Ziffern ab, so entstehen zwey Klassen, wovon die Klasse zur linken zwey aber auch nur eine Ziffer haben kann.

3) Die Klasse zur linken (75) radizire man durch 2 (Anmerk. 2. §. 170.) (giebt 8), und setze diese Ziffer 8 als erste Ziffer der Wurzel zur rechten des Radikanden, von diesem durch einen Vertikalstrich getrennt.

4) Diese Wurzel (8) setze man in (n. 1.) statt a, berechne das erste Glied $a^2$ (giebt 64), setze dieses Resultat unter die erste Klasse (75) und subtrahire (bleibt 11).

5) Zu dem Rest (11) setze man die nächste Klasse (69, giebt 1169), nehme das zweyte Glied (2ab) der Formel in (n. 1.) berechne den Theil 2a des Produkts (giebt 16) setze diese Zahl unter die erste Ziffer (6) der herabgesetzten Klasse, schließe sie in Klammern ein, und dividire damit in die oben stehende Zahl (116, giebt 7).

6) Diesen Quozienten 7 setze man als zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel zur rechten der ersten Ziffer (8); nehme selbige statt b, berechne

die übrigen Theile der Formel in (n. 1.) nehmlich 2ab und $b^2$, setze selbige so unter einander daß das letztere um eine Stelle weiter zur rechten kommt, addire sie, und subtrahire die Summe von der obenstehenden Zahl (1169). Bleibt nichts übrig, so hat man zur rechten die gesuchte Wurzel (87) vollständig; die nächkleinste aber, wenn nach der Subtrakzion noch ein Rest bleibt.

| Beyspiel: | Radikand | Wurzel |
|---|---|---|
| | 7569 | 87 |
| | 64 | |
| | 1169 | |
| | 2a = (16) | |
| | 2ab = 112 | |
| | $b^2$ = 49 | |
| | 2ab + $b^2$ = 1169 | |
| | subtrahirt, bleibt 0 | |

Beweis. Ist a die erste, b die zweyte Ziffer der Wurzel, so giebt der Ausdruck $a^2 + 2ab + b^2$, (wenn man $a^2$ in die 2te, 2ab in die 1te und $b^2$ in die 0te Ordnung setzt) den gegebenen Radikanden (7569) (§. 57. u. §. 167). Die erste Klasse 75 ist von der zweyten Ordnung, enthält also $a^2$, und man mußte demnach a (d. h. die erste Ziffer der Wurzel) erhalten, indem man 75 durch 2 radizirte (§. 60. n. 15. I.). Nachdem aber $a^2$ berechnet und subtrahirt war, so enthielt der Rest (1169) noch 2ab und $b^2$, und zwar enthält die Zahl 116, das Glied 2ab (weil beyde von der ersten Ordnung sind). Da nun $\frac{2ab}{2a} = b$ ist

(§.

(§. 32. n. 15. I.), so mußte man nothwendig b (die zweyte Ziffer der Wurzel) erhalten, indem man mit 2 a (16) in 116 dividirte *). Nachdem nun b gefunden war, war die Aufgabe gelöst; man berechnete nur noch die beyden andern Theile 2 ab und $b^2$, und subtrahirte sie, um zu wissen ob die Wurzel vollständig ist, und ob man nicht den Quozienten zu groß oder zu klein genommen habe.

Anmerk. 1. Da $2ab + b^2 = (2a + b)b$ (§. 33.), und hier 2 ab von der 1 ten, $b^2$ aber von der 0 ten Ordnung ist, so darf man nur 2 a von der 1 ten, und b von der 0 ten Ordnung nehmen, um mittelst des Ausdrucks $(2a + b)b$ dasselbe zu erhalten, was in (n. 6.) der Auflösung subtrahirt wurde. Nun ist aber der Divisor 16 immer 2 a; schreibt man daher diesem zur rechten die zweyte Ziffer b (7, giebt 167), so hat man schon 2 a + b (nach §. 144. Anmerk. 2.). Man kann demnach das Verfahren (n. 6.) der Auflösung dahin umändern, daß man gleich nach der Division die Ziffer 7 neben dem Divisor hinsetzt, dann die entstehende Zahl (167) sogleich mit b (7) multiplizirt und das Produkt subtrahirt; welches eine beträchtliche Abkürzung gewährt. An folgendem Beyspiel kann man dieß noch besonders verbildlicht sehen:



*) Eigentlich könnte man durch diese Division eine größere Zahl erhalten als die zweyte Ziffer der Wurzel, weil 116 zwar 2 a b enthalten muß, aber auch mehr enthalten kann. Man muß daher darauf sehen, den Quozienten nicht zu groß zu nehmen, damit nachher noch beyde Glieder, 2 a b und $b^2$, subtrahirt werden können.

| | Radikand | Wurzel |
|---|---|---|
| | 5\|61 | 23 |
| | 4 | |
| | 161 | |
| | (4)3 | |
| mit 3 multiplizirt | 129 | |
| dieß subtrahirt giebt | 32 | |

die nächstkleinste Wurzel ist hier 23, die zweyte Potenz hiervon 529 und der Rest 32.

Anmerk. 2. Man sieht leicht, daß man auf demselben Wege auch eine 5 oder 6 ziffrige Zahl z. B. 56169 durch 2 radiziren könne, nur mit dem Unterschied, daß man die Klasse zur linken (561), weil sie dreiziffrig ist, nicht mehr nach (§. 170.) sondern selbst erst nach vorstehender Aufgabe durch 2 radiziren kann. Man erhält dann

| | Radikand | Wurzel |
|---|---|---|
| | 5\|61\|69 | 237 |
| | 4 : : : : | |
| | 161 : : | |
| | (4)3 : : | |
| | 129 : : | |
| Rest | 3269 | |
| | (46)7 | |
| | 3269 | |
| | 0 | |

wo zuerst 561 durch 2 radizirt, dadurch der erste Theil 23 der ganzen Wurzel gefunden und dann, 23 statt a nehmend, die Operazion nach (n. 4 — n. 6.) der Auflösung fortgesetzt wurde, um die dritte Ziffer 7 zu erhalten (§. 167. Anmerk.).

An-

Anmerk. 3. Geht man so weiter fort, so kann man leicht jede beliebige mehrziffrige ganze Zahl durch 2 radiziren.

Es findet sich sonach $\sqrt[2]{22638564} = 4758.$ (Man sehe folgenden §. 173. Anmerk. 3.)

§. 173. Aufgabe. 3.

Eine gegebene 4 bis 6 ziffrige Zahl z. B. 103823 durch 3 zu radiziren.

Auflösung.

1) Man nehme aus (§. 167. Vorbereit.) die Formel (n. 2.)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2) Theile den Radikanden in zwey Klassen und nehme die ersten drei Ziffern von der rechten zur linken gehend in eine Klasse, die übrigen in die zweyte.

3) Radizire diese zweyte Klasse (103) durch 3 (giebt 4) und setze diese Zahl als erste Ziffer der gesuchten Wurzel zur rechten des Radikanden.

4) Diese Ziffer setze man statt a, berechne in der Formel (n. 1.) das erste Glied $a^3$, und subtrahire diese Potenz (64) von der ersten Klasse (103, giebt 39).

5) Zum Rest (39) setze man die zweyte Klasse (823) herab (giebt 39823), berechne vom zweyten Gliede obiger Formel $3a^2b$ den Theil $3a^2$ (giebt 48), setze solche unter die erste Ziffer (8) der herabgesetzten Klasse, und dividire damit in die oben stehende Zahl (398). Den Quozienten

(7) setze man als zweyte Ziffer der Wurzel zur rechten der ersten Ziffer (4).

6) Diesen Quozienten (7) nehme man statt b, berechne die 3 übrigen Ausdrücke der Formel in (n. 1.) nehmlich $3a^2b$, $3ab^2$, $b^3$ (giebt resp. 336, 588, 343), setze selbige dergestalt unter einander, daß jedes folgende um eine Stelle weiter zur rechten zu stehen kommt, addire sie und subtrahire die Summe von obenstehender Zahl (39823); bleibt nichts, so hat man zur rechten die vollständige Wurzel, im Falle aber daß ein Rest bliebe, die nächst kleinste.

**Beyspiel:**

| | Radikand | Wurzel |
|---|---|---|
| | 103\|823 | 47 |
| | 64 | |
| | 39823 | |
| $3a^2$ = | (48) | |
| $3a^2b$ = | 336 | |
| $3ab^2$ = | 588 | |
| $b^3$ = | 343 | |
| addirt giebt | 39823 | |
| dieß subtrahirt bleibt | 0 | |

daher $\sqrt[3]{103823} = 47.$

**Beweis.** Sind a und b die beyden Ziffern der Wurzel, so giebt der Ausdruck $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wenn die auf einander folgenden Glieder in auf einander folgenden niedrigern Ordnungen gesetzt werden, den Radikanden (103823) (nach §. 57. und §. 167.). Da die Klasse zur linken (103) von der dritten Ordnung ist, so ent-

enthält sie $a^3$; radizirt man daher selbige durch 3, so giebt dieß a (d. h. die erste Ziffer der gesuchten Wurzel) (nach §. 60. n. 15. I.). Nachdem nun zu dem Reste (39) die nächste Klasse herabgesetzt ist, so enthält die dadurch entstandene Zahl (39823) noch die drei Glieder $3a^2b$, $3ab^2$, $b^3$; und zwar die erste Ziffer der herabgesetzten Klasse nebst den zur linken stehenden Ziffern (nehmlich 398) das Glied $3a^2b$, weil sowohl jene Zahl als auch dieses Glied von der zweyten Ordnung sind; dividirt man daher in gedachte Zahl mit $3a^2$ (48), so erhält man nothwendig b, weil nach (§. 32. n. 15. I.) $\frac{3a^2 . b}{3a^2} = b$ ist. Hiermit war die Aufgabe gelöst, und das Geschäft (nro. 6. der Auflösung) wird bloß vorgenommen, um zu untersuchen, ob man den Quozienten nicht zu groß oder zu klein genommen habe; welches zu erweisen war.

Anmerk. 1. Da $3a^2b = (3a^2)b$ ist, und der in Klammern geschlossene Divisor immer $3a^2$ ist, so darf man selbigen bloß mit der zweyten Ziffer b multipliziren, um sogleich das Glied $3a^2 \cdot b$ berechnet zu haben.

Anmerk. 2. Aus demselben Grunde wie (Anmerk. 2. und Anmerk. 3. §. 172.) kann man auf demselben Wege auch eine 7 bis 9 ziffrige Zahl, überhaupt eine beliebige mehrziffrige Zahl durch 3 radiziren, und zwar bildet man sich leicht folgende allgemeine Regel:

(Sey z. B. 46539457173 durch 3 zu radiziren).

1) Man

1) Man setze den Radikanden hin und theile ihn von der rechten zur linken Hand gehend in Klassen immer 3 Ziffern in eine Klasse.

2) Radizire die zwey ersten Klassen (46539) durch 3 (nach der Aufgabe) und setze die zwey Ziffern (35), die man zur Wurzel erhält, zur rechten des Radikanden hin.

3) Diesen Theil der Wurzel nehme man statt a, setze zum Rest (3664) die nächste Klasse (457) herab, und suche nach (n. 5. und n. 6. der Auflösung) b (9), die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel.

4) So fahre man fort, setze immer zum Rest die nächste Klasse herab, nehme den ganzen vorher gefundenen Theil der Wurzel statt a, und suche nach (n. 5. und n. 6. der Auflös.) b als neue Ziffer der gesuchten Wurzel, bis man die letzte Klasse herabgesetzt und dazu die letzte Ziffer der Wurzel gefunden hat.

Folgendes Schema mag dies noch erläutern.

Radi-

| | | Radikand | Wurzel |
|---|---|---|---|
| | | 46 539 457 173 | 3597 |
| | | 27 | |
| | | 19539 | |
| $a = 3$, | $3a^2 =$ | (27) | |
| | $3a^2b =$ | 135 | |
| | $3ab^2 =$ | 225 | |
| | $b^3 =$ | 125 | |
| | addirt | 15875 | |
| | subtrah. | 3664457 | |
| $a = 35$, | $3a^2 =$ | (3675) | |
| | $3a^2b =$ | 33075 | |
| | $3ab^2 =$ | 8505 | |
| | $b^3 =$ | 729 | |
| | addirt | 3393279 | |
| | subtrah. | 271178173 | |
| $a = 359$, | $3a^2 =$ | (386643) | |
| | $3a^2b =$ | 2706501 | |
| | $3ab^2 =$ | 52773 | |
| | $b^3 =$ | 343 | |
| | addirt | 271178173 | |
| | subtrahirt bleibt | 0 | |

Anmerk. 3. Dieselbe allgemeine Regel findet auch in (§. 172. Anmerk. 3.) statt, sobald man nur, statt hier 3 dort nur 2 Ziffern in eine Klasse nimmt, und wie hier mit 3 radizirt wurde, dort mit 2 radizirt; überhaupt die gehörigen leicht einzusehenden Abänderungen trifft.

§. 174. Es fällt sogleich in die Augen, daß man auf dieselbe Art auch durch 4, 5, überhaupt durch

durch jede beliebige Zahl radiziren könne, indem man die Formel (§. 68.) zu Hülfe nimmt, den gegebenen Radikanden in Klassen theilt, und zwar immer so viel Ziffern in eine Klasse nimmt, als der Wurzelexponent Einheiten hat. Es erhellet aber zu gleicher Zeit, daß das Geschäft unverhältnißmäßig mühsamer werde, je größer der Wurzelexponent ist.

Anmerk. Die zweyte Potenz von a, nehmlich $a^2$ nennt man auch das Quadrat von a, so wie die dritte Potenz ($a^3$) den Kubus von a. Eben so heißt die zweyte Wurzel aus a nehmlich ($\sqrt[2]{a}$), die Quadrat-Wurzel, so wie unter Kubik-Wurzel die dritte Wurzel ($\sqrt[3]{a}$) verstanden wird. Man sagt dann auch: die Zahl a werde quadrirt, kubirt, wenn man sie mit 2, oder mit 3 potenzirt. Eben so statt zu sagen: die Zahl a werde durch 2 oder durch 3 radizirt, sagt man auch: es werde aus a die Quadrat- oder die Kubik-Wurzel gezogen. Endlich pflegt man bey der Bezeichnung der 2ten Wurzel ($\sqrt[2]{a}$), den Wurzelexponenten ganz wegzulassen, und bloß dafür $\sqrt{a}$ zu setzen, so daß also jedes Bild wie $\sqrt{64}$ statt $\sqrt[2]{64}$ stehet.

§. 175. In den Fällen wo beym Radiziren zuletzt noch ein Rest bleibt, ist die Aufgabe eigentlich nicht vollständig gelöst, sondern nur die nächstkleinste Wurzel gefunden. Hängt man aber an den letzten Rest, so wie an die jedesmal folgenden, Klassen von Nullen an, setzt die Operazion (§. 173.

Anmerk. 2. Auflösung n. 3. und n. 4.) fort und nimmt von den Ziffern der Wurzel, von der rechten zur linken, so viele zu Decimalstellen, als man Klassen von Nullen angehängt hatte, so kann man sich der Wurzel so sehr nähern als man nur immer will. (Vergleiche §. 162. und besonders die Anmerkung §. 162.) Dies findet statt für jeden Wurzelexponenten.

Beyspiel:

Sey 14 durch 2 zu radiziren

| Radikand | Wurzel |
|---|---|
| 14 | 3,741 |
| 9 | |
| 500 | |
| (6)7 | |
| 469 | |
| 3100 | |
| (74)4 | |
| 2976 | |
| 12400 | |
| (748)1 | |
| 7481 | |
| 4919 | |

daher näherungsweise $\sqrt[2]{14} = 3{,}741 \ldots$

Um sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens zu überzeugen, bemerke man, daß nach (§. 138. Anmerk. 1.) ist:

$14 = 14000000 \cdot 10^{-6}$ folglich (nach §. 171.)

$$\sqrt[2]{14} = \sqrt[2]{14000000} \cdot 10^{-3}$$

Nun

Nun ist aber die nächstkleinste z te Wurzel aus 14000000, die durch vorhin angegebene Operazion gefundene Zahl 3741, demnach die 2 te Wurzel aus 14, annäherungsweise $= 3741 \cdot 10^{-3}$ $=$ (§. 138.) 3,741.

Hätte man mehr Klassen von Nullen angehängt, so hätte man auch mehr Decimalen bekommen, folglich Resultate erhalten, die zwar immer noch kleiner als die wahre Wurzel sind, ihr aber doch näher und näher kommen, und so nahe kommen können als man nur immer will.

Auf diesem Wege findet man noch $\sqrt[3]{24}$ $=$ 2,8 ... nehmlich

| Radikand | Wurzel |
|---|---|
| 24 | 2,8 |
| 8 | |
| 16000 | |
| (12) | |
| 96 | |
| 384 | |
| 512 | |
| 13952 | |
| 2048 | |

## §. 176. Aufgabe. 4.

Einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl zu radiziren.

### Auflösung.

Man fange bey dem Komma an in Klassen einzutheilen, radizire den Radikanden wie eine ganze Zahl, und nehme von der rechten zur linken zu gehend, in der Wurzel so viel Ziffern zu Decimalen

len als man Klassen von Decimalen im Radikanden hatte. (Um die Klassen zur rechten des Komma mit der gehörigen Anzahl von Ziffern anzufüllen, muß man (§. 136.) an den Radikanden zur rechten öfters noch Nullen anhängen, was ohnedies geschehen muß, wenn zuletzt ein Rest bleibt, die Wurzel also näherungsweise gefunden werden soll).

Sey 2,4 durch 3 zu radiziren, so hat man:

| Radikand | Wurzel |
|---|---|
| 2\|400 | 1338 |
| 1 | |
| 1400 | |
| (3) | |
| 9 | |
| 27 | |
| 27 | |
| 1197 | |
| 203000 | |
| (507) | |
| 1521 | |
| 351 | |
| 27 | |
| 155637 | |
| 47363000 | |
| (53067) | |
| 424536 | |
| 25536 | |
| 512 | |
| 42709472 | |
| 4653528 | |

daher näherungsweise $\sqrt[3]{2,4} = 1,338 \ldots$

§. 177. Eine bestimmte Zahl durch eine bestimmte Zahl logarithmiren heißt, den Logarithmen der beyden bestimmten Zahlen (§. 58.) in ein nach dem Zahlensystem geordnetes Bild verwandeln; das so erhaltene Bild heißt dann auch der Logarithme der bestimmten Zahlen.

§. 178. Aufgabe. 1.

Durch eine beliebige einziffrige Zahl (z. B. 7.) eine ganze Zahl (die nicht größer als $7^9$ ist, z. B. 5764801) zu logarithmiren.

Auflösung.

Man nehme die Basis 7, potenzire selbige nach und nach mit allen Ziffern von 1 bis 9, bis man den Logarithmanden (5764801) erhält; die Ziffer (8) bey welcher dies statt findet ist der gesuchte Logarithme (nach §. 58.).

Anmerk. Man kann sich auch der Tabelle (§. 165. Anmerk. 2.) bedienen, die Basis (7) in der ersten Vertikalreihe (Reihe der Dignanden) aufsuchen, in der dazu gehörigen Horizontalreihe fortgehen, bis man zu dem Logarithmanden (5764801) gelangt, und in der dazu gehörigen Vertikalreihe bis zur ersten Horizontalreihe aufsteigen, allwo der gesuchte Logarithme (8) sich findet.

§. 179. Aufgabe. 2.

Eine beliebige bestimmte Zahl durch eine andere beliebige zu logarithmiren.

Auflösung.

1) Man setze den Logarithmanden hin, mache zur

zur linken und rechten Vertikalstriche und schreibe zur linken die Basis.

2) Diese Basis potenzire man mit den Einheiten der auf einander folgenden positiven Ordnungen $10^1$ oder 10, $10^2$ oder 100 2c. 2c., und setze die erhaltenen Potenzen nach der Reihe oberhalb der Basis; dann auch mit den Einheiten der negativen Ordnungen $10^{-1}$ oder $\frac{1}{10}$, $10^{-2}$ oder $\frac{1}{100}$, $10^{-3}$ oder $\frac{1}{1000}$ 2c., und setze diese Resultate in derselben Folge unterhalb der Basis hin.

Zu 2. Dies letztere geschieht mittelst des Radizirens nach (§. 75.), nehmlich: $2^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{2}$, $2^{\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{2} =$ (§. 77.) $\sqrt[10]{\sqrt[10]{2}}$ u. s. w.: Auch ist $\sqrt[10]{2} = \sqrt[5]{(\sqrt{2})}$ (nach §. 77. u. Anmerk. §. 174.). Die Basis selbst kann dabey angesehen werden als das Resultat, welches entsteht, wenn man selbige mit $10^0$ oder 1 potenzirt. Die oberhalb der Basis stehenden Potenzen nimmt man nur bis zu derjenigen, die noch kleiner als der Logarithmand ist, deren zunächst folgende aber größer werden würde; daher man im Beyspiel nur bis $2^{10}$ fortzugehen nöthig hatte, weil $2^{100}$ schon größer ist als gedachter Logarithmand.

3) Dann nehme man die am weitesten oberhalb der Basis stehende Potenz ($2^{10}$ oder 1024), und potenzire selbige nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 2c. bis man zu einer Potenz gelangt $(1024)^4$, welche noch kleiner ist, als der Logarithmand, ihm aber unter den übrigen am nächsten kommt; nehme solche, setze sie unter den Logarithmanden und dividire in selbigen; mache unterhalb einen Horizontalstrich

und

und setze unter ihn den Quozienten; endlich setze man den Exponenten (4) der Potenz, mit welcher man dividirte, als erste Ziffer des Logarithmen zur rechten des Logarithmanden.

4) Nehme die unterhalb der vorhergenommenen Potenz nächstfolgende (2), potenzire solche (wie in n. 3.) mit allen Ziffern 1, 2, 3, 4 ꝛc., bis man wieder eine Potenz ($2^2$) erhält, die dem in (n. 3.) erhaltenen Quozienten am nächsten kommt, schreibe diese unterhalb des Quozienten, mache einen Horizontalstrich, dividire in erstern Quozienten, setze den neuen Quozienten unterhalb des Horizontalstrichs, und den Exponenten (2) der Potenz, die als Divisor gebraucht wurde, als zweyte Ziffer des Logarithmen zur rechten der ersten Ziffer (4).

5) So fahre man fort in der Reihe der Potenzen immer die nächstfolgende $2^{1:10}$, $2^{1:100}$ ꝛc. zu nehmen, selbige mit allen Ziffern 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu potenziren, die dem unterhalb des Horizontalstrichs stehenden Quozienten zunächstkommende Potenz zu nehmen und in gedachten Quozienten zu dividiren, den neuen Quozienten unter den neuen Horizontalstrich, den Exponenten der als Divisor gebrauchten Potenz aber jedes mal als neue Ziffer der Wurzel neben die vorher gefundenen hinzusetzen, bis man einen Quozienten = 1 erhält.

6) Diejenige Ziffer des Logarithmen, welche man erhält, indem man unter den Potenzen der Basis die Basis selbst nimmt (hier 2), bezeichne man als die Ziffer der 0ten Ordnung, so hat man zur rechten des Logarithmanden den gesuchten Logarithmen vollständig.

7) Er-

7) Erhält man keinen Quozienten der = 1 wird, so setzt man die Operazion so lange fort, bis man einen Quozienten erhalten hat, der sehr nahe = 1 ist, und hat dann den Logarithmen näherungsweise. Es gilt hier wieder alles was (§. 162. Anmerk.) über die annäherungsweise gefundenen Resultate gesagt wurde.

| Basis | Logarithmand | Logarithme |
|---|---|---|
| $1024 = 2^{10}$ | 8765102325977 | 42,994... |
| $2 = 2^{1}$ | Divis. $10995116277776 = (2^{10})^{4}$ | |
| $1,07177.. = 2^{1:10}$ | Quoz. $7,97181 \ldots = a$ | |
| $1,00695.. = 2^{1:100}$ | Divis. $4 \ldots = (2^{1})^{2}$ | |
| $1,00069.. = 2^{1:1000}$ | Quoz. $1,99295 \ldots = b$ | |
| u. s. w. | Divis. $1,86608 \ldots = (2^{1:10})^{9}$ | |
| | Quoz. $1,06799 \ldots = c$ | |
| | Divis. $1,06440 \ldots = (2^{1:100})^{9}$ | |
| | Quoz. $1,00337 \ldots = d$ | |
| | Divis. $1,00279 \ldots = (2^{1:1000})^{4}$ | |
| | Quoz. $1,00058 \ldots = e$ | |
| | u. s. w. | |

Beweis. Nach (§. 30.) ist, wenn die auf einander folgenden Quozienten durch a, b, c, d, e, ꝛc. und der Logarithmand mit N bezeichnet wird:

$$d = (2^{1:1000})^4 \,.\, e$$
$$c = (2^{1:100})^9 \,.\, d$$
$$b = (2^{1:10})^9 \,.\, c$$
$$a = (2^1)^2 \,.\, b$$
$$N = (2^{10})^4 \,.\, a$$

Multiplizirt man alle diese Gleichungen mit einander, so erhält man, nach (§. 104. n. 5.): N . a . b . c . d. $= (2^{10})^4 . (2^1)^2 . (2^{1:10})^9 . (2^{1:100})^9 . (2^{1:1000})^4 \times$ a . b . c . d . e oder, wenn man diese Gleichung durch a . b . c . d dividirt, nach (§. 103. n. 7.):

$$N = (2^{10})^4 . (2^1)^2 . (2^{1:10})^9 . (2^{1:100})^9 . (2^{1:1000})^4 . e$$

Ist nun e = 1 oder sehr nahe = 1, so kann man diesen Faktor ganz weglassen nach (§. 32. n. 8.) und hat daher im ersten Falle genau, im andern wenigstens näherungsweise:

$$N = (2^{10})^4 . (2^1)^2 . (2^{1:10})^9 . (2^{1:100})^9 . (2^{1:000})^4$$

$= (§. 65. u. §. 133.)\; 2^{4.10} . 2^2 . 2^{9.10^{-1}} . 2^{9.10^{-2}} . 2^{4.10^{-3}}$

$= (§. 61.)\; 2^{4.10 + 2 + 9.10^{-1} + 9.10^{-2} + 4.10^{-3}}$

$= (§. 124. u. §. 132.)\; 2^{42,994}$ folglich nach (§. 60. n. 14)

N ? 2 = 42,994; welches zu erweisen war.

§. 180. Dem vorhergehenden Geschäft des Logarithmirens steht nichts im Wege, als die unendliche Mühe und Arbeit, die zur Ausführung desselben erfordert wird.

Logarithmirte man aber eine große Anzahl erster Zahlen der Zahlenreihe (z. B. von 1 bis 1000000) ein für alle mal durch eine beliebige Zahl (z. B. 10) und stellte die erhaltenen Logarithmen mit ihren Logarithmanden tabellarisch hin, so dürfte man zur Lösung der Aufgabe (§. 179.) "eine Zahl b durch eine andere Zahl a zu logarithmiren", nur die zu den Logarithmanden b und a für diese Basis 10 gehörigen Logarithmen nehmen und solche durch einander dividiren, indem der Quozient nach (§. 86. VII.) der gesuchte Logarithme b?a seyn wird. Das ganze Geschäft des Logarithmirens ist dann auf eine einfache Division zurückgebracht.

§. 181. Mittelst einer solchen Tabelle kann man aber nicht nur das Logarithmiren, sondern auch das Multipliziren, Dividiren, Potenziren und Radiziren vermöge (§. 82. bis §. 85.), ungemein erleichtern. Hat man nehmlich 1) zwey Zahlen a und b mit einander zu multipliziren, so nehme man die dazu gehörigen Logarithmen aus gedachter Tabelle und addire solche, und die erhaltene Summe ist der zum Produkt ab gehörige Logarithme (nach §. 82.); nimmt man also dann den in der Tabelle zu diesem Logarithmen gehörigen Logarithmanden, so hat man das gesuchte Produkt ab. Ist aber 2) a durch b zu dividiren, so subtrahire man die zugehörigen Logarithmen und die Differenz ist der zum Quozienten $\frac{a}{b}$ gehörige Logarithme (§. 83.); sucht man also in der Tabelle zu diesem Logarithmen den Logarithmanden, so ist dieser der gesuchte Quozient

$\frac{a}{b}$. Hat man ferner eine Zahl a, 3) mit einer andern Zahl b zu potenziren, oder 4) durch diese Zahl b zu radiziren, so suche man in der Tabelle den zu a gehörigen Logarithmen, multiplizire im ersten Fall oder dividire im zweyten selbigen durch die Zahl b, so ist das erste Resultat der zur Potenz $a^b$, das letztere aber der zur Wurzel $\sqrt[b]{a}$ gehörige Logarithme (§. 84. und §. 85.); sucht man daher zu diesen Logarithmen die zugehörigen Logarithmanden, so ist der erstere die gesuchte Potenz $a^b$, der zweyte oder die gesuchte Wurzel $\sqrt[b]{a}$.

§. 182. Eine solche durch Logarithmirung einer Anzahl erster Zahlen der Zahlenreihe mittelst einer und derselben Basis entstandene Reihe von Logarithmen nennt man ein Logarithmensystem; und es giebt daher so viele verschiedene Logarithmensysteme als man verschiedene Zahlen zur Basis annimmt. Man unterscheidet darunter vorzüglich das Briggische (gemeine), wo die Basis 10 ist, und das Neper'sche (natürliche, hyperbolische), bey welcher der Decimalbruch 2,7182818... zur Basis genommen ist.

Anmerk. 1. Ein Logarithmensystem tabellarisch aufgestellt giebt eine Logarithmentabelle. Die vorzüglichsten Logarithmentabellen sind zur Zeit die von Schulze, Vega, und Callet.

Anmerk. 2. Da in einem Logarithmensystem die Basis immer dieselbe bleibt, so kann man in der Bezeichnung des Logarithmen selbige ganz

weg-

weglassen, und bloß hinzudenken, sobald man nur Logarithmen betrachtet, die zu einem und demselben System gehören. Man schreibt daher, wenn z. B. von dem Briggischen System die Rede ist, log. a, log. b, ꝛc. statt a?10, b?10, ꝛc.; und diese Bezeichnung kann immer beybehalten werden, so lange man nicht Logarithmen betrachtet, die verschiedene Basis haben. (Vgl. §. 125. Anmerk.).

§. 183. Da man sich bey dem Logarithmiren immer der angeführten Logarithmentabellen bedienen muß, auch selbige ausserdem, besonders bey dem Potenziren und dem Radiziren, die wesentlichsten Dienste leisten, ja beynahe unentbehrlich sind (§. 181.), so halte ich es für dienlich zum leichtern Gebrauch jener Tabellen das Briggische Logarithmensystem (das sie gewöhnlich enthalten) noch näher zu betrachten und dessen vorzüglichste Eigenschaften anzugeben.

§. 184. Es ist:

$$10^0 = 1,\ 10^1 = 10,\ 10^2 = 100,\ 10^3 = 1000,\ 10^4 = 10000 \text{ ꝛc.}$$

dahero nach (§. 58.): 1?10 = 0, 10?10 = 1, 100?10 = 2, 1000?10 = 3, 10000?10 = 4, ꝛc.

$$10^m ? 10 = m$$

oder log. 1 = 0, log. 10 = 1, log. 100 = 2, log. 1000 = 3, log. 10000 = 4, ꝛc. log. $(10^m)$ = m; d. h. der Logarithme einer Einheit irgend einer Ordnung ist jedesmal der Zahl (dem Exponenten) der Ordnung gleich *). Dies gilt natürlich auch, wenn

*) Man vergesse nicht, daß, so oft hier oder im folgenden von Logarithmen die Rede ist, immer nur die Briggischen Logarithmen verstanden werden.

wenn die Ordnung negativ ist; man hat z. B. $\log.(10^{-2}) = \log.\frac{1}{100} = -2$, rc.

§. 185. Daraus folgt nach (§. 108. n. 13.), daß:

der Logarithme jeder einziffrigen Zahl $> 0$ und $< 1$
. . . zweyziffrigen . $> 1$ und $< 2$
. . . dreiziffrigen . $> 2$ und $< 3$
. . . vierziffrigen . $> 3$ und $< 4$

und allgemein

der Logarithme jeder m ziffrigen Zahl $> m - 1$ u. $< m$ ist.

§. 186. In diesem briggischen Systeme sind daher die Logarithmen aller Zahlen (die Einheiten der verschiedenen Ordnungen ausgenommen) immer Decimalbrüche, die als eine Summe aus einer ganzen Zahl und Decimalstellen betrachtet werden können. Die ganze Zahl nennt man die Kennziffer oder Karakteristik, die Decimalen aber die Mantissa oder auch bloß Decimalen.

Aus (§. 185.) gehet hervor, daß in jedem brigg. Logarithmen die Kennziffer immer um 1 kleiner ist, als der Logarithmand Ziffern hat. Umgekehrt ist daher die Anzahl der Ziffern des Logarithmanden immer um 1 größer als die Kennziffer des Logarithmen (wenn der Logarithmand eine ganze Zahl ist). Da aber in einer m ziffrigen Zahl, die am weitesten zur linken stehende Ziffer immer von der (m — 1)ten Ordnung ist, so ist die Ordnung dieser am weitesten zur linken stehenden Ziffer des Logarithmanden, der Kennziffer des Logarithmen gleich.

§. 187. Da jeder Briggische Logarithme eine Summe ist aus Decimalen und der Kennziffer, so folgt nach (§. 16.), daß man eine ganze Zahl von einem solchen Logarithmen subtrahiren könne, indem man sie von der Kennziffer subtrahirt, die Decimalen aber ungeändert läßt. Nun ist aber nach (§. 139.): $0,0090763 = \frac{90763}{10000000}$ und nach (§. 83. u. §. 182. Anmerk. 2.)

$$\log. 0,0090763 = \log. 90763 - \log. 10000000$$
$$= (§. 184.) \quad \log. 90763 - 7$$

d. h. der Logarithme irgend eines Decimalbruchs wird gefunden, wenn man von dem Logarithmen der ganzen Zahl, die durch Weglassung des Komma hervorgeht, die Zahl der Decimalstellen des gegebenen Logarithmanden subtrahirt.

In der ganzen Zahl 90763 ist ferner die Ziffer 9 von der 4ten Ordnung, die Kennziffer ihres Logarithmen daher = 4 (§. 186.), demnach die Kennziffer des zum Decimalbruch 0,0090763 gehörigen Logarithmen = 4 − 7 = (§. 26.) − 3; und dieß ist auch die Ordnung der im Logarithmanden 0,0090763 am weitesten zur linken stehenden bedeutlichen Ziffer 9 *).

§. 188. Verbindet man (§. 186.) mit (§. 187.), so findet man, als Grundlage des Gebrauchs der brigg. Logarithmen:

1) **Die Kennziffer des Logarithmen einer bestimmten Zahl** (ganzen Zahl oder Decimalbruch) **ist immer der Ordnung** der

*) Ich gebrauche hier das Wort **bedeutliche** Ziffer, um anzuzeigen, daß die 0 (Null) ausgeschlossen ist.

der am weitesten zur linken stehenden bedeutlichen Ziffer des Logarithmanden gleich.

2) Der Logarithme einer aus denselben Ziffern geschriebenen Zahl hat dieselbe Mantissa (Decimalen), die Zahl mag eine ganze Zahl oder ein Decimalbruch seyn, und im letztern Falle mag das Komma stehen wo es nur immer will.

Es ist z. B.

$$\log.\ 47{,}9643 = 1{,}6809181\ldots$$
$$\log.\ 47964{,}3 = 4{,}6809181\ldots$$
$$\log.\ 4{,}79643 = 0{,}6809181\ldots$$
$$\log.\ 0{,}00479643 = -\ 3{,}6809181\ldots$$

Im letztern Logarithmen bezieht sich das Zeichen (—) bloß auf die 3, die Decimalen dagegen sind zu (— 3) addirt (§. 186. u. §. 187.). Man kann daher auch setzen (nach §. 27. n. 1.):

$$\log.\ 0{,}00479643 = 0{,}6809181\ldots - 3,$$

Uebrigens sind diese beyden Sätze hinlänglich, um die gewöhnlichen Tabellen mit der größten Leichtigkeit gebrauchen zu können.

Anmerk. 1. In den Tabellen sind unter der Reihe der Logarithmanden (gewöhnlich Reihe der natürlichen Zahlen genannt, und oberhalb der Columne durch ein N bezeichnet) bloß die auf einander folgenden ganzen Zahlen aufgeführt, weil die Decimalbrüche dieselbe Mantisse haben, als die durch Weglassung des Komma entstehende ganze Zahl, die Kennziffer aber jedesmal ohne Hülfe einer Tabelle durch die

die Ordnung der am weitesten zur linken stehenden bedeutlichen Ziffer des Logarithmanden bestimmt ist. Aus diesem Grunde sind auch in den meisten Tabellen die Kennziffern ganz weggelassen, und nur die Mantissa (Decimalen) der Logarithmen aufgestellt.

Anmerk. 2. Da die Logarithmen der eigentlichen Brüche immer eine negative Kennziffer haben (nach §. 187. und §. 161.), so pflegt man selbige gewöhnlich um 10 zu vermehren, und dann dieselbe Zahl 10 wieder zu subtrahiren nach (§. 14. n. 8. I.). So schreibt man z. B.

statt $\log. 0{,}00479643 = -3{,}6809181\ldots$

häufiger $\log. 0{,}00479643 = 7{,}6809181\ldots - 10,$

Eben so häufig pflegt man dann bloß

$$\log. 0{,}00479643 = 7{,}6809181$$

zu schreiben, den Subtrahenden 10 aber im Gedächtniß zu behalten. Da aber dann bey dem Gebrauche dieser Logarithmen gedachte Subtrahenden doch immer gehörig in Rechnung gebracht werden müssen, so ist es besser dieß letztere gänzlich zu unterlassen, und den Subtrahenden immer beyzubehalten.

Zu §. 188. Anmerk. 2. Die in den Tabellen aufgestellten Logarithmen der trigonometrischen Linien sind alle um 10 zu groß genommen, weil gedachte trigonom. Hülfszahlen meistens eigentliche Decimalbrüche sind, ihre Logarithmen daher eine negative Kennziffer haben. Bey dem Gebrauche derselben darf man also nie unterlassen, den Subtrahenden 10 immer noch hinzuzufügen.

§. 189. Nachdem wir nun in den drei letztern Kapiteln gezeigt haben, wie jedes der 7 Zahlbilder (§. §. 11. 12. 29. 30. 56. 57. 58.) in ein nach dem Zahlensysteme geordnetes Bild verwandelt wer-

werden können, wenn die einfachen Zahlbilder Bilder bestimmter Zahlen sind, so kann man jetzt leicht jeden aus bestimmten Zahlen durch die 7 Operazionen beliebig zusammengesetzten Ausdruck in ähnliche Bilder bestimmter Zahlen verwandeln (Vgl. §. 163. Anmerk. 2.). Ferner erhellet, daß wenn zwey Ausdrücke einander gleich sind [da dies nichts anders ausdrückt, als daß beyde Ausdrücke dieselbe Zahl bezeichnen, und eine und dieselbe Zahl auch durch ein und dasselbe Bild bezeichnet wird (§. 120.)] sie, berechnet, auch ein und dasselbe bestimmte Zahlbild geben müssen.

Zu §. 189. Man kann sich bey dieser Berechnung der aus mehrern einfachen Zahlbildern zusammengesetzten Ausdrücke durch eine schickliche Anwendung der im 1ten, 2ten, 3ten und 5ten Kapitel enthaltenen Sätze öfters große Abkürzungen verschaffen. Soll man z. B. erstlich die Zahlen 3, 15, 9, 8 mit einander, dann noch die Zahlen 5, 4, 6 und 9 mit einander multiplizieren und mit letzterem Produkt (1080) in ersteres (3240) dividiren (giebt 3), so erhält man dieß viel leichter, wenn man weiß, daß 2.4 = 8, 2.3 = 6 und $\frac{3.15.9.8}{5.4.6.9} = \frac{3.15.9.4.2}{5.4.3.2.9} =$ (§. 51. Anmerk.) $\frac{15}{5}$ ist; denn dann ergiebt sich das Resultat 3 sogleich ohne alle Berechnung.

Zu §. 159. Wenn ein Bruch, dessen Zähler und Nenner bestimmte Zahlen sind, zu einer bestimmten Zahl addirt werden soll, so läßt man das Zeichen (+) gewöhnlich weg und schreibt beyde ohne alles Zeichen neben einander. Das Bild $7\frac{3}{4}$ stehet also statt $7 + \frac{3}{4}$ und nicht statt $7 \times \frac{3}{4}$. Sind die Zahlbilder unbestimmt, so darf man dieß nicht thun; denn das Bild $a\frac{b}{c}$ stehet immer statt des Produktes $a.\frac{b}{c}$ und nie statt der Summe $a + \frac{b}{c}$.

# Anhang.

## Elemente der angewandten Zahlenlehre

oder

## Grundlinien der allgemeinen Größenlehre

enthaltend.

§. 1. Die Zahlen, die wir bisher ganz abstrakt betrachtet haben, ohne Rücksicht auf ein besonderes Merkmal der Einheit zu nehmen, trifft man allenthalben im Leben zur Vergleichung der Dinge angewandt. Geschiehet diese Vergleichung nicht unmittelbar, sondern mittelst der Sätze der Zahlenlehre, so erhält man die angewandte Zahlenlehre.

§. 2. Berücksichtigt man bey der Vergleichung der Dinge bloß ihre allgemeinsten Merkmale so bezeichnet man selbige durch Buchstaben (da man nur für Dinge besonderer Art beständige Zeichen hat). Um aber jede Verwirrung zu vermeiden, so bezeichne ich die Dinge (die auch Zahlen seyn können), immer nur durch die großen Buchstaben des Alphabets, während durch die kleinern Buchstaben, wie bisher so auch im folgenden, jedesmal nur Zahlen bezeichnet seyn sollen *).

Zu §. 2. Für viele Dinge besonderer Art hat man auch besondere Zeichen (z. B. Ctr., ℔, fl., Kr., gr., Mtz., Rhtl., L., ß., u. s. w.), die meistens bloß die Anfangsbuchstaben der Wörter sind; für andere nimmt man dann die ganzen Wörter (Schuh, Zoll, Elle ꝛc. ꝛc.).

§. 3.

*) Nennt man die Dinge, in so ferne sie mit einander verglichen werden, Größen, so kann man die angewandte Zahlenlehre, auch Größenlehre, und in so ferne man bey diesen Dingen nur die Allen gemeinschaftlichen Merkmale derselben berücksichtigt, auch allgemeine Größenlehre nennen.

§. 3. Zwey Dinge heißen **gleichartig**, in so ferne man ihre gemeinschaftlichen, **ungleichartig** (verschiedenartig), in so ferne man ihre verschiedenen Merkmale berücksichtigt. So ist ein Spanier mit einem Engländer beyde als solche, ungleichartig, aber beyde als Menschen betrachtet, gleichartig.

§. 4. Berücksichtiget man bey einer Zahl ein oder einige besondere Merkmale der Einheit, so hat man eine **benannte Zahl**; die Zahlen selbst, so wie wir sie bis jetzt abstrakt betrachtet haben, heißen, im Gegensatz dieser, **unbenannte Zahlen**. Die Einheit heißt dann das **Maas** oder die **Benennung**.

Eine benannte Zahl drückt daher immer ein **Ding** aus, welches mit der Einheit (Maas, Benennung) gleichartig ist; und man sagt dieses Ding sey durch das andere Ding (Einheit, Maas) **gemessen**, sobald die Zahl bestimmt ist, die anzeigt, wie viel mal dieß letztere genommen werden müsse, um das erstere zu erzeugen.

Zwey benannte Zahlen sind **gleichbenannt**, wenn sie einerlei Maas (Benennung) haben, **ungleichbenannt**, wenn die Einheit (Maas rc.) verschieden ist.

Zu §. 4. Nimmt man z. B. ein Pfund mehreremal, faßt aber bloß das Wiederholen dieses Gesetzten auf, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß das Gesetzte gerade dieses Pfund ist, so erhält man eine unbenannte Zahl (z. B. 6). Nimmt man aber darauf Rücksicht, daß gerade dieses Gewicht (℔) so viel mal wiederholt wird, so erhält man die benannte Zahl 6 ℔.

Dabey

Dabey sind 6 ℔ und 9 ℔ gleichbenannt, 6 ℔ und 9 Loth aber ungleichbenannt.

Eine Linie A ist durch eine andere Linie B (Schuh) gemessen, so bald man weiß, daß sie die letztere (den Schuh) 6, 8 ꝛc. mal enthält.

§. 5. Zwey Dinge A und B heißen einander gleich, wenn sie beyde durch dieselbe benannte Zahl ausgedrückt werden können; man drückt diese Gleichheit bildlich aus durch $A = B$. Dagegen sagt man das Ding A sey größer als das ihm gleichartige Ding B, und umgekehrt das Ding B sey kleiner als das Ding A, wenn zu dem Dinge B noch ein anderes gleichartiges Ding hinzu kommen muß, um das Ding A zu erzeugen; man drückt dieß bildlich aus durch $A > B$ oder $B < A$.

§. 6. Das durch Vereinigung mehrerer gleichartiger Dinge (z. B. Haufen Korn) A, B, C entstehende Ding bezeichnet man durch $A + B + C$; eben so bezeichnet man das Ding welches übrig bleibt, wenn man von dem Ding A ein anderes gleichartiges Ding B wegnimmt (oder das Ding welches mit dem Ding B zusammengenommen das Ding A ausmacht) durch $A - B$.

Diesen Bildern, so wie den einzelnen Theilen derselben, giebt man dieselben Namen, die wir den in der Zahlenlehre (§. §. 7. 9. 11. 12. u. 14.) aufgestellten ähnlichen Bildern gegeben haben.

§. 7. Eine benannte Zahl bezeichnet man dadurch, daß man neben dem Zahlzeichen zur rechten das Zeichen des Dinges setzt, welches zur Einheit (Maas) genommen ist. So drückt also das Bild mB das Ding aus, welches entsteht, wenn das

Ding

Ding B, m mal genommen wird. Dabey heißt das Ding mB, welches man auch durch ein eigenes Zeichen z. B. A bezeichnen kann, das m fache von B, und B der mte Theil von A.

Das Ding B (z. B. Linie) welches m mal genommen das Ding A giebt, bezeichnet man auch durch $\frac{A}{m}$; so daß die Bilder $A = mB$ und $B = \frac{A}{m}$, ein und dasselbe ausdrücken, nehmlich, daß das Ding B, m mal genommen, das Ding A giebt.

Man sagt dann auch: das Ding B sey mit der Zahl m multiplizirt, und das Ding A sey durch die Zahl m dividirt.

Die Ausdrücke: ein Ding B mit einer Zahl m multiplizìren oder das m fache des Dinges B nehmen, so wie die Ausdrücke: ein Ding A durch eine Zahl m dividiren oder den m ten Theil von A nehmen sind daher gleichbedeutend *).

Zu §.7. So sind 6 Schuh, 5 Ctr., 11 ℔ ꝛc. Bilder benannter Zahlen; eben so schreibt man

$$\text{Schuh} = 12 \text{ Zoll und Zoll} = \frac{\text{Schuh}}{12}$$

Anmerk. Ist das Ding B selbst wieder eine benannte Zahl, z. B. nC, so schließt man selbige,

*) Da in der Zahlenlehre bloß von unbenannten Zahlen die Rede ist, und die großen Buchstaben des Alphabets immer die Anwesenheit von Dingen beurkunden, so können alle diese Bezeichnungen und Benennungen, unbeschadet der in der Zahlenlehre aufgestellten Bedeutungen derselben, also ohne Verwirrung befürchten zu dürfen, beybehalten werden.

hige, wenn sie als Einheit gebraucht wird, in Klammern ein. Das Bild m (nC) drückt also das Ding aus, welches entsteht, wenn das durch nC bezeichnete Ding, m mal genommen wird.

§. 8. Aus (E. §. 1. und K. I. §§. 11. 12. u. 14.) folgt sogleich

1) $mC = C + C + C + C + \ldots$ (m mal genommen)

2) $mC + nC = (m + n)C$

3) $mC - nC = (m - n)C$

daher auch *a*) $1C = C$*) und *b*) $0C = 0$**) d. h. für (n. 2. u. n. 3.): Zwey gleichbenannte Zahlen mC und nC werden addirt, oder subtrahirt, wenn man die Zahlen m und n addirt oder subtrahirt, und der Summe oder Differenz dieselbe Benennung C giebt. So sind 6 Schuh + 9 Schuh = 15 Schuh, 9 fl — 5 fl = 4 fl.

§. 9. Es ist

$m(nC) =$ (§. 8. n. 1.) $nC + nC + nC + \ldots$ = (§. 8. n. 2.) $(n + n + n + \ldots)C =$ (K. II. §. 32. n. 1.) $(nm)C =$ (K. II. §. 32. n. 13.) $(mn)C$; daher

4) $m(nC) = (mn)C$ und nach (§. 7.)

5) $nC = \frac{(mn)C}{m}$

d. h.

---

*) Daher schreibt man statt Schuh auch 1 Schuh, statt ℔ auch 1 ℔, statt Thaler auch 1 Thaler u. s. w.

**) Das Bild o drückt hier zur linken die Abwesenheit der Zahl, zur rechten aber überhaupt die Abwesenheit eines Dinges aus.

d. h. eine benannte Zahl nC wird mit einer Zahl m multiplizirt (§. 7.), wenn man die Zahl n mit m multiplizirt (K. II. §. 29) und dem Produkte (mn) dieselbe Benennung C giebt; dann: eine benannte Zahl (mn) C wird durch eine Zahl m dividirt (§. 7.) oder der mte Theil von ihr genommen, wenn man die Zahl mn durch die Zahl m dividirt (K. II. §. 32. n. 15. I.), und dem Quozienten n dieselbe Benennung C giebt. Sollen also 6 fl., 8 mal genommen werden, so erhält man $8 (6 \text{ fl.}) = (8 \cdot 6) \text{ fl.} = 48 \text{ fl.}$ Soll aber die Länge von 56 Schuh in 7 Theile getheilt werden, so ist ein Theil $= \frac{56 \text{ Schuh}}{7} = \frac{56}{7} \text{Schuh} = 8 \text{ Schuh}$.

§. 10. Aufgabe.

Es ist $A = mB$, $B = nC$ und $A = pC$; man soll bestimmen, wie m, n, p von einander abhängen.

Auflösung und Beweis.

Man hat $A = mB = m(nC) =$ (§. 9. n. 4.) $mnC$; aber auch $A = pC$, folglich

1) $mn = p$ und (K. II. §. 32. n. 14.)

2) $m = \frac{p}{n}$ oder $= p : n$ und

3) $n = \frac{p}{m}$ oder $= p : m$.

§. 11. Sind daher zwey von den drei Zahlen m, n, p gegeben, so läßt sich immer die dritte daraus bestimmen. Dieß giebt drei besondere Lehrsätze:

I. Wenn $A = mB$ und $B = nC$ ist

so ist auch $A = mnC$

II. Wenn $A = pC$ und $B = nC$ ist

so ist auch $A = \frac{p}{n}B = (p:n)B$.

III. Wenn $A = mB$ und $A = pC$, oder wenn $mB = pC$ ist

so ist auch $B = \frac{p}{m}C = (p:m)C$.

Zu §. 11. Hier sind beyde Dinge, B und C, als Einheit (Maas) gebraucht. Nennt man die B, die größer als C ist, die höhere, C aber die niedrigere Einheit, und die Zahl n das Verhältniß der höhern zur niedrigern; so kann man gedachte Sätze auf folgende Art wörtlich ausdrücken:

I. Eine benannte Zahl mB, die sich auf die höhere Einheit B bezieht (d. h. das Ding A), wird auf die niedrigere Einheit C zurückgebracht (d. h. dasselbe Ding, das durch mB ausgedrückt ist, wird durch eine andere benannte Zahl ausgedrückt, deren Einheit das Ding C ist), wenn man die Zahl m mit der Verhältnißzahl n multiplizirt. So ist z. B.

4 fl. = 4 . 60 Kr. = 240 Kr.;
9 Dutzend Ziegel = 9 . 12 Ziegel = 108 Ziegel;
4 Ctr. = 4 . 100 ℔ = 400 ℔ = 400 . 32 Loth = 12800 Loth.

II. Eine benannte Zahl pC (d. h. das Ding A) wird auf die höhere Einheit B zurückgebracht, wenn man die Zahl p durch die Verhältnißzahl n dividirt. So ist z. B:

240 Kr. = $\frac{240}{60}$ fl. = 4 fl.

24 ₰ = $\frac{24}{4}$ Kr. = 6 Kr.; 400 fl. = $\frac{400}{25}$ Rollen = 16 Rollen (wenn nehmlich in jeder Rolle 25 fl. sind, d. h. wenn Rolle = 25 fl. ist).

III. Wenn ein und dasselbe Ding A durch zwey ungleichbenannte Zahlen mB und pC ausgedrückt ist (oder wenn zwey ungleichbenannte Zahlen einander gleich sind), so findet man das Verhältniß der höhern Einheit B zur niedern C, wenn man p durch m dividirt.

| Ist also: | so ist auch: |
|---|---|
| 8 Schuh = 96 Zoll | Schuh = (96 : 8) Zoll = 12 Zoll |
| 16 Reihen Ziegel = 192 Z. | Reihe Z. = (192 : 16) Z = 12 Z. |
| 9 Rollen = 225 fl. | Rolle = (225 : 9) fl. = 25 fl. |

u. s. w.

Anmerk. Hätte man: A = mB, B = nC, C = pD, D = qE ꝛc., so wäre dann auch

$$A = mB = mnC = mnpD = mnpqE \text{ ꝛc.}$$

§. 12. Nach (K. II. §. 53.) kann und muß man die Sätze (§. 11. II. u. III.) auch dann noch gelten lassen, wenn p:n oder p:m keine (ganze) Zahl bezeichneten, sondern gebrochene Zahlen wären. Die Bilder (p:n)C und (p:m)C heißen dann **gebrochene benannte Zahlen**. Dergleichen gebrochene benannte Zahlen drücken meistens an sich gar nichts aus, sind bloße Form und können nur dadurch zu wirklichen und brauchbaren Resultaten führen, daß man auf sie die Sätze der benannten Zahlen anwendet.

Zu §. 12. Fragte man z. B.: Wie viel Gulden machen 36 Kreuzer, so erhielte man nach (§. 11. II.)

$$36 \text{ Kr.} = \tfrac{36}{60} \text{ fl.} = (\text{K. II. §. 52.}) \tfrac{3}{5} \text{ fl.}$$

und dieß Resultat drückt die Unmöglichkeit der Frage aus. Nichts desto weniger kann die Form $\frac{3}{5}$ fl. statt 36 Kr. beybehalten werden. Nach (§. 11. I.) hat man sogleich wieder

$$\tfrac{3}{5} \text{ fl.} = \tfrac{3}{5} . 60 \text{ Kr.} = (\text{K. II. §. 43.}) \; 3 . \tfrac{60}{5} \text{ Kr.}$$
$$= 3 . 12 \text{ Kr.} = 36 \text{ Kr.}$$

Sollten

Sollten 36 Kr. 15 mal bezahlt werden, so machte die Summe 15 . 36 Kr. = 540 Kr. = 9 fl..

Dasselbe Resultat würde man aber auch erhalten, wenn man die Form $\frac{3}{5}$ fl. statt 36 Kr. setzte, und 15 mal nähme; man erhielte nehmlich

$$15\left(\tfrac{3}{5}\text{ fl.}\right) = 15 . \tfrac{3}{5}\text{ fl.} = \tfrac{15}{5} . 3\text{ fl.} = 3 . 3\text{ fl.} = 9\text{ fl.}$$

Sollte jemand $\frac{3}{4}$ fl. bezahlen, so wäre diese Forderung nicht zu erfüllen; denn legt man den Gulden auch nur 1 mal hin, so hat man schon mehr bezahlt als man sollte. Dagegen hat man nach (§. 11. I.)

$$(3:4)\text{ fl.} = (3:4)\,60\text{ Kr.} = (\text{K. II. §. 41.})\,[(3 . 60):4]\text{ Kr.} = (180:4)\text{ Kr.} = 45\text{ Kr. oder}$$

$$(3:4)\text{ fl.} = (3:4)\,20\text{ gr.} = (\text{K. II. §. 43.})\,3\,(20:4)\text{ gr.} = 3 . 5\text{ gr.} = 15\text{ gr.}$$

und nach diesen Bestimmungen darf man nur den Kreuzer 45 mal, oder den Groschen 15 mal nehmen, um die verlangte Zahlung geleistet zu haben.

§. 13. Setzt man in (§. 11. III.) p = 1, so hat man:

wenn $m B = 1 C = C$ ist, so ist auch $B = \frac{1}{m} C$

d. h. der Bruch $\frac{1}{m}$ auf ein Ding C als Einheit bezogen drückt das Ding B, d. h. den m ten Theil des Dinges C (§. 7.), aus. Ferner ist nach (§. 9. n. 4. und §. 12.)

$$p\left(\frac{1}{m}B\right) = (\text{§. 9. n. 4.})\,p . \frac{1}{m}B = (\text{K. II. §. 41.})\,\frac{p}{m}B;$$

d. h. der Bruch $\frac{p}{m}$ auf das Ding B als Einheit bezogen drückt immer das Ding aus, welches entsteht, wenn man den m ten Theil von B, (nehmlich

lich $\frac{1}{m}$ B), p mal nimmt. Da aber nach (§. 9. n. 5.) auch $\frac{p}{m} B = \frac{p B}{m}$ ist, so erhält man dasselbe, wenn man zuerst das p fache von B, und dann von diesem den m ten Theil nimmt (§. 7.).

Zu §. 13. Das Bild $\frac{3}{4}$ Elle drückt demnach die Länge aus, die entsteht, wenn man die Elle in 4 Theile theilt, und einen solchen Theil 3 mal nimmt, oder wenn man die Elle 3 mal und von dieser ganzen Länge den 4ten Theil nimmt. Ist daher die Einheit ein räumlich Ausgedehntes, so drückt jeder Bruch, der auf diese Einheit sich bezieht, ein wirkliches räumlich Ausgedehntes aus, da der Raum beliebig theilbar, oben erwähnte Theilung also immer möglich ist.

Uebrigens ist dieß der Grund, warum man die Form $\frac{3}{4}$ 2c. wörtlich durch drei Viertheil 2c. ausspricht.

§. 14. Da die Sätze (§. 11. I. II. und III.) nach (§. 12.) allgemeiner gelten, wenn die Zahlen m, n, p nicht bloß ganze sondern auch gebrochene Zahlen bezeichnen, so läßt sich auch ihr wörtlicher Ausdruck allgemeiner angeben als dieß in der (Note zu §. 11.) geschehen konnte.

Ist nehmlich A = m B, wo m eine ganze oder auch eine gebrochene Zahl bezeichnen kann, so nennt man dieses Zahlbild m das Verhältniß des Dinges A zu dem Dinge B, so wie das Ding A das Vorderglied, B aber das Hinterglied des Verhältnisses. Die wörtlichen Ausdrücke gedachter Sätze sind nun:

I. Wenn das Verhältniß von A zu B, = m, das von B zu C, = n gegeben ist, so wird das Verhältniß von A zu C gefunden, indem man beyde ge-

gegebene m und n mit einander multiplizirt; daher solches = m n.

Man sagt dann: das Verhältniß von A zu C ist aus den beyden Verhältnissen von A zu B, und von B zu C zusammengesetzt.

II. Sind die Verhältnisse zweyer Dinge A und B zu einem dritten C gegeben, ersteres = p, letzteres = n, so ist das Verhältniß von A zu B, = p:n d. h. dieß Verhältniß wird gefunden, wenn man das erstere Verhältniß p durch das letztere n dividirt. Aus demselben Grunde findet man dann aber auch das Verhältniß von B zu A, = n:p.

Da der Bruch n:p durch Umkehrung des Bruches p:n entsteht, indem man nehmlich den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler macht, so sagt man auch: das Verhältniß von A zu B sey das Umgekehrte des Verhältnisses von B zu A.

Ist m eine ganze Zahl, so ist wegen m = m:1 wenn A = m B ist, das Verhältniß von A zu B, = m oder = m:1 und dann das Verhältniß von B zu A, = 1:m.

III. Sind zwey benannte Zahlen m B und n C einander gleich, so ist das Verhältniß von B zu C, = n:m, das von C zu B aber = m:n d. h. es ist B = (n:m) C und C = (m:n) B.

Zu §. 14. Wieviel Gulden macht eine Summe Geldes von 35 Bair. Thalern? Hier ist 35 das Verhältniß der Summe Geldes (A) zu dem Bairischen Thaler (B) d. h. A = 35 Bair. Thaler. Das Verhältniß des Bair. Thaler (B) zum Gulden (C) = $2\frac{2}{5}$ (d. h. Bair. Thal. = $2\frac{2}{5}$ fl.); folglich (nach I.) das Verhältniß der Summe Geldes (A)

zum

zum Gulden (G), = 35 . ($2\frac{2}{5}$) = (K. II. §. 46. X.) $35 . \frac{12}{5} = \frac{35}{5} . 12 = 7 . 12 = 84$ (d. h. A = 84 fl., oder 25 Bair. Thaler machen 84 fl.).

Die Regel (II) wird vorzüglich benutzt, um das Verhältniß zweyer Dinge A und B zu einander zu bestimmen; man darf nehmlich nur beyde durch ein drittes C messen (§. 7) (d. h. das Verhältniß von A zu C, und von B zu C bestimmen) und dann die Zahlen, die man erhält, durch einander dividiren. Hätte man z. B. zwey Linien A und B, von welchen die erstere A, 17 Zolle, die zweyte B aber 9 Zolle hätte, so wäre das Verhältniß von A zu B, = 17 : 9, das von B zu A, = 9 : 17. Eben so ist das Verhältniß von (6 ℔) zu (9 ℔), = 6 : 9, das von (9 ℔) zu (6 ℔), = 9 : 6. Das Verhältniß von (2 fl.) zu (45 Kr.), = 120 : 45 (weil 2 fl. = 120 Kr. ist). Ferner ist das Verhältniß von (3 ℔) zu (24 Loth), = 96 : 24 u. s. w. Alles dieses drückt nichts anders aus als daß A = (17:9) B; B = (9:17) A; 6 ℔ = $\frac{6}{9}$ (9 ℔) und 9 ℔ = $\frac{9}{6}$ (6 ℔); 2 fl. = (120 : 45) × [45 Kr.] und 45 Kr. = (45 : 120) [2 fl.]; 3 ℔ = $\frac{96}{24}$ × (24 Loth) = 4 (24 Loth) und 24 Loth = $\frac{24}{96}$ (3 ℔) = (K. II. §. 52.) $\frac{1}{4}$ (3 ℔) = $\frac{3}{4}$ ℔ ist.

Hätte man endlich (für III.) 10 Bair. ℔ = 11 Nürnb. ℔, so wäre auch das Verhältniß des Bair. ℔ zum Nürnb. ℔ = 11 : 10, das des Nürnb. ℔ zum Bair. ℔ = 10 : 11. (d. h. Bair. ℔ = (11 : 10) Nürnb. ℔ und Nürnb. ℔ = (10 : 11) Bair. ℔). Oder hätte man $2\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{1}{2}$ Dukate, so wäre das Verhältniß des Gulden zur Dukate = $\frac{1}{2} : 2\frac{3}{4} = \frac{1}{2} : \frac{11}{4}$ = (K. II. §. 49) $\frac{4}{22}$ = (K. II. §. 52.) $\frac{2}{11}$ [d. h. fl. = (2 : 11) Duk. und Duk. = (11 : 2) fl. = $5\frac{1}{2}$ fl.].

§. 15. Die Aufgabe (§. 10.) erschöpft alle möglichen Fälle, welche in Betreff der Vergleichung der gleichartigen Dinge unter sich, vorkommen können. Jede im Leben vorkommende Aufgabe, gedach-

te

te Untersuchung betreffend, muß daher in ihr enthalten seyn, nur mehr oder weniger zusammengesetzt. Die Sätze (§. 11. II. und III.) können aber auf den Satz (I.) zurückgebracht werden.

In (II.) nehmlich ist gegeben: $A = pC$, $B = nC$; setzt man dafür nach (§. 14. II.) $A = pC$, $C = (1:n)B$, so hat man nach (I.) $A = p(1:n)B =$ (K. II. §. 41.) $(p:n)B$.

In (III.) aber war gegeben $A = mB$, $A = pC$; setzt man nach dafür $B = (1:m)A$, $A = pC$, so hat man nach (I.) $B = (1:m)pC = (p:m)C$; und diese Resultate stimmen mit den (§. 11.) aufgestellten vollkommen überein. Alle im Leben vorkommenden Aufgaben von oben erwähnter Art, müssen daher immer in dem Satz (§. 11. I.) oder wenn sie zusammengesetzter sind, in der durch wiederholte Anwendung desselben Satzes erhaltenen (Anmerk. §. 11.) enthalten seyn.

Zu §. 15. Sey folgende Aufgabe gegeben: Wieviel machen 501 Bremer Thaler in Frankfurther Gulden Müntz, wenn 100 Br. Thal = 107 Fkfth. Th. Corrent; 6 Thal. Müntz = 5 Thal. Corr. und 3 fl. = 2 Thal. sind?

Hier hat man

Brem. Th = (107 : 100) Fkfth. Thaler Corr.
Thal. Corr. = (6 : 5) Thal. Müntz
Thal. M. = (3 : 2) fl. Müntz.

Demnach, nach (Anmerk. §. 11.) gedachte Summe Geldes.

$$A = 501 \text{ Br. Th.} = 501 \cdot \frac{107}{100} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \text{ fl. Müntz} = (\text{K. II. §. 48}),$$

$$\frac{501 \cdot 107 \cdot 6 \cdot 3}{100 \cdot 5 \cdot 2} \text{ fl. M.} = 964 \frac{926}{1000} \text{ fl. M.}$$

Letztern Bruch könnte man nach (§. 11. I.), wenn man wollte, auf Kr. reduziren, nehmlich:

$\frac{926}{1000}$ fl. = $\frac{926}{1000}$ . 60 Kr. = $\frac{926 \cdot 60}{1000}$ Kr. = $55\frac{56}{100}$ Kr.

und $\frac{56}{100}$ Kr. = $\frac{56}{100}$ 4 X = $\frac{56 \cdot 4}{100}$ X = $2\frac{24}{100}$ X;

daher machen 501 Brem. Thal. in Frcfth. fl. Müntz

964 fl. + 55 Kr. + $2\frac{24}{100}$ X. oder 964 fl. 55 Kr. $2\frac{24}{100}$ X. *).

§. 16. Sind M und 𝔐 zwey Dinge (z. B. Kapital und Zinßen) die dergestalt von einander abhängen, daß jeder gleiche Theil Z von M auch immer einen gleichen Theil 𝔷 von 𝔐 erzeugt; so wird zu Z + Z oder 2 Z der Theil 𝔷 + 𝔷 oder 2 𝔷 ꝛc. und allgemein: zu einem Theil A = m Z von M, ein Theil 𝔄 von 𝔐, = m 𝔷 gehören. Ist nun B ein anderer Theil von M, = n Z, so gehört auch hiezu ein Theil 𝔅 von 𝔐, = n 𝔷; daher nach (§. 14. II.) das Verhältniß von B zu A, = n : m, und dasselbe erhält man auch für das Verhältniß von 𝔅 zu 𝔄; d. h. das Verhältniß zweyer Theile B und A von M ist dann dasselbe, als das der zugehörigen Theile 𝔅 und 𝔄 von 𝔐.

In obiger Voraussetzung sagt man: Die Dinge M und 𝔐 seyen (direkt) proporzional, und die Theile B, A, 𝔅 und 𝔄, bilden eine (geometrische) Proporzion; dieß drückt man auch aus, indem man sagt: Es verhalten sich B und A zu einander wie 𝔅 und 𝔄. — So oft drei dieser Theile gegeben sind, ist dadurch der 4te bestimmt. Aus zweyen nehmlich z. B. B und A bestimmt man (nach §. 14. II.) das Verhältniß dieser, und dies ist auch zu-

*) Bey der Addizion ungleich benannter Zahlen läßt man die Zeichen (+) gewöhnlich weg.

zugleich das Verhältniß der beyden andern 𝔅 und 𝔄; folglich, wenn Eins der beyden andern B und A gegeben ist, ist das andere bestimmt.

Zu §. 16. So pflegen Waaren (M) und ihre Preiße (𝔐), so Kraft (M) und Wirkung (𝔐), Zeit einer Bewegung (M) und der durchlaufene Raum (𝔐) ꝛc. ꝛc. proporzional zu seyn; doch ist solches nicht nothwendig, sondern muß jedesmal erst untersucht werden, wenn es nicht stillschweigend vorausgesetzt wird, wie dieß im Leben oft der Fall ist.

1) 2 ℔ kosten 7 fl., was kosten 9 ℔?

Hier ist 2 ℔ = A 9 ℔ = B; 7 fl. = 𝔄 und 𝔅 zu finden. Man hat das Verhältniß von B zu A, = 9 : 2 folglich das von 𝔅 zu 𝔄, = 9 : 2 d. h. 𝔅 = (9 : 2) 𝔄 = (9 : 2) 7 fl. = (K. II. §. 41.) (63 : 2) fl. = $31\frac{1}{2}$ fl.

3) Wieviel Kapital hat man ausstehen, wenn man jährlich 45 fl. Zinßen bekommt und von 100 fl. Kapital 4 fl. Zinßen bedungen sind?

Hier ist 45 fl Zinse = A, 4 fl. Zinse = B, gesuchtes Kapital = 𝔄, 100 fl. Kapital = 𝔅; demnach das Verhältniß von A zu B, oder das von 𝔄 zu 𝔅, = 45 : 4 d. h. 𝔄 = (45 : 4) 𝔅 = $\frac{45}{4}$. 100 fl. = $\frac{4500}{4}$ fl. = 1125 fl.; und so in allen solchen und ähnlichen Aufgaben.

§. 17. Seyen nun 𝔐, M und M¹ Dinge, die dergestalt von einander abhängen, daß bey gleichen Theilen von M¹, 𝔐 mit M, und bey gleichen Theilen von M, 𝔐 mit M¹ proporzional ist. Sind dann 𝔄, 𝔅, Theile von 𝔐; A, B, Theile von M und A¹, B¹ Theile von M¹; und 𝔄 abhängig von A und A¹, 𝔅 von B und B¹, so ist das Verhältniß von 𝔄 zu 𝔅, dem Produkte gleich, welches entsteht, wenn man die Verhältnisse von

A

A zu B und $A^1$ zu $B^1$ mit einander multiplizirt; d. h. ist $A = \frac{m}{n} B$, $A^1 = \frac{p}{q} B^1$ so ist auch

$$\mathfrak{A} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \mathfrak{B}.$$

Denn man denke sich einen Theil $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{M}$, der von B und $A^1$ abhängt, so hängt

$\mathfrak{A}$ von A und $A^1$

$\mathfrak{C}$ von B und $A^1$

$\mathfrak{B}$ von B und $B^1$ ab, demnach ist (vermöge der Bedingung) das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{C}$, dasselbe als das Verhältniß von A zu B; und das Verhältniß von $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{B}$ dem von $A^1$ zu $B^1$ gleich; d. h. $\mathfrak{A} = \frac{m}{n} \mathfrak{C}$, u. $\mathfrak{C} = \frac{p}{q} \mathfrak{B}$. Folglich nach (§. 11. I.)

$$\mathfrak{A} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \mathfrak{B};$$ welches zu erweisen war.

Man sagt daher auch: das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ ist **zusammengesetzt** aus den beyden Verhältnissen von A zu B und $A^1$ zu $B^1$ (§. 14. I.).

Zu § 17. So pflegen Zinsen ($\mathfrak{M}$), von Kapitalien (M) und der Zeit ($M^1$); so der durchlaufene Raum ($\mathfrak{M}$), von der Geschwindigkeit (M) und von der Zeit der Bewegung ($M^1$), der Lohn ($\mathfrak{M}$), von der Menge der Arbeiter (M) und der Zeit ($M^1$) in der sie arbeiten; die Flächen der Dreiecke ($\mathfrak{M}$), von den Grundlinien (M) und den Höhen ($M^1$), u. s. w. abzuhängen.

Verdienen z. B. 2 Arbeiter (A) in 3 Tagen ($A^1$) 4 Gulden ($\mathfrak{A}$), so werden 6 Arbeiter (B) in 5 Tagen ($B^1$) 20 Gulden ($\mathfrak{B}$) verdienen; denn man hat $B = \frac{6}{2} A$, $B^1 = \frac{5}{3} A^1$ dahero $\mathfrak{B} = \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \mathfrak{A} =$ (K. II. §. 49.) $\frac{30}{6} \mathfrak{A} = 5 \mathfrak{A} = 5$ (4 fl.) $= 20$ fl.

§. 18.

§. 18. Setzt man nun das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$, $= \frac{a}{b}$ so ist

1) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ dahero auch nach (K. II. §. 32. n. 14.)

2) $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{p}{q} =$ (K. II. §. 50. XVI.) $\frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p}$ und

3) $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}$

d. h. das Verhältniß von A zu B (nehmlich m:n) wird gefunden wenn man das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ (nehmlich a:b) durch das Verhältniß $A^1$ zu $B^1$ (d. h. p:q) dividirt, oder mit dem umgekehrten letztern Verhältniß (d. h. q:p) multiplizirt (§. 14. II.). Dasselbe gilt, mit den gehörigen Abänderungen, auch für das Verhältniß von $A^1$ zu $B^1$ (nach n. 3.).

So wie man daher sagt: das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ ist aus den beyden Verhältnissen von A zu B und $A^1$ zu $B^1$ zusammengesetzt, eben so kann man dann auch sagen: das Verhältniß von A zu B ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ und dem umgekehrten andern Verhältniß von $A^1$ zu $B^1$.

Sind daher von den sechs Dingen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A, B, $A^1$, $B^1$, fünfe gegeben, so ist dadurch das sechste bestimmt.

Zu §. 17. und 18. Seyen z. B. folgende Aufgaben gegeben:

1) 2 Arbeiter bekommen in 6 Tagen 4 fl. Lohn, wie viel werden 5 Arbeiter in 9 Tagen bekommen? — Hier sind die

die Arbeiter M, und zwar 2 Arbeit. = A, 5 Arbeit. = B; die Tage $M^{I}$, und 6 Tage = $A^{I}$, 9 Tage = $B^{I}$; der Lohn 𝔐, nehmlich 4 fl. = 𝔄, und 𝔅 zu finden. Daher findet sich $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$, $\frac{p}{q} = \frac{6}{9}$ und (nach §. 17.) $\frac{a}{b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{9} = \frac{12}{45}$ d. h. $𝔄 = \frac{12}{45}𝔅$ und $𝔅 = \frac{45}{12}𝔄 = \frac{45}{12}4$ fl. = 15 fl.

2) Wieviel Jahre muß ein Kapital von 600 fl. ausstehen, um 80 fl. Zinßen zu tragen, wenn ein anderes zu 200 fl. in 3 Jahren 15 fl. Zinßen trägt? — Hier ist Kapital M, Zeit $M^{I}$ und Zinßen 𝔐, und zwar 600 fl. K. = A, 200 fl. K. = B, 80 fl. Z. = 𝔄, 15 fl. Z. = 𝔅, $A^{I}$ zu suchen und 3 Jahre = $B^{I}$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{80}{15}$, $\frac{m}{n} = \frac{600}{200}$ daher (nach §. 18. $\frac{p}{q} = \frac{80}{15} \cdot \frac{200}{600} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9}$ d. h $A^{I} = \frac{16}{9} B^{I} = \frac{16}{9} \cdot 3$ Jahre $= \frac{16}{3}$ Jahre $= 5\frac{1}{3}$ Jahr.

§. 19. Ist das Ding 𝔐, von den drei Dinge M, $M^{I}$, $M^{II}$ auf die (§. 17.) angegebene Art abhängig (daß nehmlich 𝔐 mit jedem der Dinge M, $M^{I}$, $M^{II}$ einzeln proporzional ist, sobald die Theile der übrigen dieser 3 Dinge gleich sind), und 𝔄, ℭ, 𝔇, 𝔅, Theile von 𝔐, A, B, Theile von M $A^{I}$, $B^{I}$ Theile von $M^{I}$, u. $A^{II}$, $B^{II}$, Theile von $M^{II}$, so daß

𝔄 von A, $A^{I}$, $A^{II}$
ℭ von B, $A^{I}$, $A^{II}$
𝔇 von B, $B^{I}$, $A^{II}$
und 𝔅 von B, $B^{I}$, $B^{II}$ abhängt, so ist (vermöge der Bedingung) das Verhältniß von 𝔄 zu ℭ dem Verhältniß von A zu B gleich (weil 𝔄, ℭ, respective von A und B, beyde aber zugleich von denselben Dingen $A^{I}$, $A^{II}$, abhängen); eben so ist dann das Verhältniß von ℭ zu 𝔇, dem von $A^{I}$ zu $B^{I}$ gleich (weil beyde sowohl ℭ als 𝔇, re-

spective von $A^{I}$ und $B^{I}$ und von denselben Dingen B und $A^{II}$ abhängen); ferner das Verhältniß von C zu B dem Verhältniß von $A^{II}$ zu $B^{II}$ gleich; d. h. wenn

$A = \frac{m}{n} B$, $A^{I} = \frac{p}{q} B^{I}$, $A^{II} = \frac{r}{s} B^{II}$; so ist

$\mathfrak{A} = \frac{m}{n} \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} = \frac{p}{q} \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} = \frac{r}{s} \mathfrak{B}$, daher nach

(Anm. §. 11.) $\mathfrak{A} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \mathfrak{B}$.

d. h. wenn $\mathfrak{A}$, von A, $A^{I}$ und $A^{II}$ und
$\mathfrak{B}$ von B, $B^{I}$ und $B^{II}$ abhängt;

so ist das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ gleich dem Produkte, welches man erhält, wenn die drei Verhältnisse, das von A zu B, von $A^{I}$ zu $B^{I}$, und von $A^{II}$ zu $B^{II}$ mit einander multiplizirt werden (oder das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ ist aus den drei Verhältnissen A zu B, $A^{I}$ zu $B^{I}$ und $A^{II}$ zu $B^{II}$ zusammengesetzt).

§. 20. Ist nun das Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$, $= \frac{a}{b}$, so hat man

1) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ und hieraus (K. II. §. 32. n. 14.)

2) $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{r}$

d. h. das Verhältniß von A zu B (nehmlich m:n) wird gefunden, wenn man das von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ (nehmlich a:b) durch die beyden andern, $A^{I}$ zu $B^{I}$ (d. h. p:q) und $A^{II}$ zu $B^{II}$ (d. h. r:s) dividirt, oder mit diesen umgekehrten andern (q:p und s:r) multiplizirt (oder das Verhältniß von A zu B ist

aus

aus dem Verhältniß von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ und den umgekehrten Verhältnissen von $A^{I}$ zu $B^{I}$ und $A^{II}$ zu $B^{II}$ zusammengesetzt) *).

Sind daher von den 8 Dingen $A$, $B$, $A^{I}$, $B^{I}$, $A^{II}$, $B^{II}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, sieben gegeben, so ist dadurch immer das 8te bestimmt.

Zu §. 19. und 20. So hängen rechtwinkliche Parallepipeda $\mathfrak{M}$ von ihrer Breite (M), Dicke ($M^{I}$) und Höhe ($M^{II}$); so kann der Lohn ($\mathfrak{M}$) für einen Graben, von dessen Länge (M), Breite ($M^{I}$) und Tiefe ($M^{II}$) u. s. w. abhängen.

Wieviel wird ein Graben aufzuwerfen kosten, der 8 Fuß breit, 2 Fuß tief und 120 Fuß lang ist, wenn ein anderer von 200 Fuß Länge, 3 Fuß Breite und $2\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe, 24 Thaler gekostet hat?

Hier hat man A = 8 Fuſs Breite, B = 3 Fuſs Breite, $A^{I} = 2$ Fuſs Tiefe, $B^{I} = 2\frac{1}{2}$ Fuſs Tiefe, $A^{II} = 120$ Fuſs Länge; $\mathfrak{A}$ = gesuchter Lohn, $\mathfrak{B}$ = 24 Thaler, folglich $A = \frac{8}{3} B$, $A^{I} = (2 : 2\frac{1}{2}) B^{I} = (2 : \frac{5}{2}) B^{I} = \frac{4}{5} B^{I}$ $A^{II} = \frac{120}{200} B^{II}$ folglich $\mathfrak{A} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{120}{200} \mathfrak{B} = \frac{8.4.120}{3.5.200}$ 24 Thaler $= \frac{32 . 24}{25}$ Th. $= 30\frac{18}{25}$ Thaler.

§. 21. Eben so kann man nun weiter fortgehen, und allgemein den Fall betrachten wo das Ding $\mathfrak{M}$ von einer beliebigen Anzahl anderer Dinge, $M$, $M^{I}$, $M^{II}$, $M^{III}$ ꝛc. auf die (§. 17. u. 19.) angegebene Art abhängt (daß nehmlich $\mathfrak{M}$ mit M proporzional, bey gleichen Theilen von $M^{I}$, $M^{II}$,

*) Was hier von dem Verhältniß von A zu B gesagt wird, findet natürlich mit den gehörigen Abänderungen auch für die Verhältnisse von $A^{I}$ zu $B^{I}$ und $A^{II}$ zu $B^{II}$ statt.

$M^{II}$, $M^{III}$ ꝛc., und M mit $M^{I}$ proporzional ist, bey gleichen Theilen der übrigen Dinge M, $M^{II}$, $M^{III}$, ꝛc. u. s. w. In diesem Falle ist das Verhältniß von A zu B aus den Verhältnissen von A zu B, $A^{I}$ zu $B^{I}$, $A^{II}$ zu $B^{II}$, $A^{III}$ zu $B^{III}$ ꝛc. zusammengesetzt, d. h. gedachtes Verhältniß von A zu B wird gefunden wenn man die letzteren alle mit einander multiplizirt; wie sich leicht auf dem (§. 19.) angegebenen Wege beweisen läßt.

Eben so ist dann auch das Verhältniß von A zu B dem Produkte gleich, welches entsteht, wenn man das von A zu B, mit allen umgekehrten übrigen Verhältnissen multiplizirt; oder das Verhältniß von A zu B ist aus dem Verhältniß von A zu B, und den umgekehrten übrigen Verhältnissen zusammengesetzt.

Nennt man die Dinge M, $M^{I}$, $M^{II}$, $M^{III}$ ꝛc., die bedingenden, M aber das bedingte Ding, so kann man obige Sätze auch so ausdrücken: 1) das Verhältniß zweyer Theile des bedingten Dinges ist aus den Verhältnissen der zugehörigen Theile der bedingenden Dinge und 2) das Verhältniß zweyer Theile eines bedingenden Dinges, aus dem Verhältniß der zugehörigen Theile des bedingten Dinges, und den umgekehrten Verhältnissen der zugehörigen Theile der übrigen bedingenden Dinge zusammengesetzt.

Zu §. 21. Hat man daher gezeigt, 1) daß sich Dreiecke oder Parallelogramme (M) bey gleichen Höhen ($M^{I}$), wie ihre Grundlinien (M), und, bey gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen; 2) daß sich zwey Prismen oder Pyramiden (M), bey gleichen Grundflächen ($M^{I}$), wie ihre Höhen (M), bey

gleichen Höhen wie ihre Grundflächen; 3) daß bey gleichförmiger Bewegung, die durchlaufenen Räume, bey gleichen Zeiten, wie ihre Geschwindigkeiten, bey gleichen Geschwindigkeiten wie die Zeiten; 4) daß die Wirkungen bewegter Körper, sich bey gleichen Geschwindigkeiten, wie die Massen, bey gleichen Massen, wie die Geschwindigkeiten; 5) daß sich die absoluten Gewichte, bey gleichem Volumen, wie die specifischen und, bey gleichem specifischem Gewichte, wie die Volumen rc. rc. rc. verhalten, so folgt aus (§. 21.) und hier insbesondere schon aus (§. 17. und 18.) unmittelbar, daß das Verhältniß der Dreiecke oder Parallelogramme, der Prismen oder Pyramiden, der durchlaufenen Räume, der Wirkungen bewegter Körper, der absoluten Gewichte rc. rc. rc. zusammengesetzt (d. h. durch Multiplikazion erzeugt) seyn wird, aus den beyden Verhältnissen 1) der Grundlinien und der Höhen, 2) der Grundflächen und der Höhen, 3) der Geschwindigkeiten und der Zeiten, 4) der Massen und der Geschwindigkeiten, 5) der Volumen und der specifischen Gewichte, rc. rc. rc. Ferner ist aber dann auch jedes der beyden in den letzten Nummern (1 bis 5) enthaltenen einfachen Verhältnisse, aus dem obigen zusammengesetzten, und dem umgekehrten andern einfachen Verhältniß zusammengesetzt. So ist z. B. (aus 5): das Verhältniß der specifischen Gewichte aus dem Verhältniß der absoluten Gewichte und dem umgekehrten der Volumen, und das Verhältniß der Volumen aus dem Verhältniß der absoluten Gewichte, und dem umgekehrten der specifischen Gewichte zusammengesetzt; so (aus 3): das Verhältniß der Geschwindigkeiten, aus dem Verhältniß der durchlaufenen Räume und dem umgekehrten der Zeiten zusammengesetzt, u. s. w.

§. 22. Ist B = A, also a:b = 1, so hat man aus (§. 18. n. 2.)

$$\frac{m}{n} = 1 : \frac{p}{q} = 1 \cdot \frac{q}{p} = \frac{q}{p}$$

d. h.

d. h. das Verhältniß von A zu B ist dann das Umgekehrte des Verhältnisses von $A^1$ zu $B^1$.

Man sagt daher in diesem Falle M wäre mit $M^1$ umgekehrt proporzional, und die Dinge A, B, $A^1$ $B^1$ stehen in umgekehrter Proporzion.

Zu §. 22. 1) Zwey Arbeiter bringen in 12 Tagen einen Haufen Holz klein, wieviel Tage werden 3 Arbeiter dazu brauchen? Hier sind die Arbeiter M, die Zeit $M^1$, die gefertigte Arbeit 𝔐; weil diese letzte dieselbe bleibt, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und A = 2 Arbeiter, B = 3 Arbeiter, $A^1$ = 12 Tage, $B^1$ zu finden. Nun findet sich $A = \frac{2}{3} B$, daher $B^1 = \frac{2}{3} A^1$ $= \frac{2}{3} \cdot 12$ Tage $= \frac{2 \cdot 12}{3}$ Tage = 8 Tage.

2) Wieviel Kapital muß man haben, um in 16 Jahren dieselben Zinßen zu bekommen, die ein Kapital von 800 fl. (beyde unter denselben Bedingungen ausgeliehen) in 12 Jahren trägt? — Hier sind die Kapitalien M, die Zeiten $M^1$, die Zinßen 𝔐, folglich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und

A = gesuchtes Kapital, B = 800 fl. $A^1$ = 16 Jahre $B^1$ = 12 Jahre; daher $A^1 = \frac{16}{12} B^1$, folglich $A = \frac{12}{16} B$ $= \frac{12}{16} \cdot 800$ fl. = 600 fl.

Sind daher in der [Note zu §. 21.] 1) die beyden Dreiecke oder Parallellogramme, 2) die beyden Prismen oder Pyramiden, 3) die beyden durchlaufenen Räume, 4) die beyden Wirkungen, 5) die beyden absoluten Gewichte ꝛc. ꝛc. einander gleich, so verhalten sich a) die Grundlinien umgekehrt, wie die Höhen, b) die Grundflächen umgekehrt, wie die Höhen, c) die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten, d) die Massen umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten, e) die specifischen Gewichte umgekehrt, wie die Volumen ꝛc. ꝛc.

§. 23. Unter derselben Voraussetzung wie (§. 22.) hat man ferner aus (§. 20. n. 2.)

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{r}$$

d. h. im Falle B = A, ist das Verhältniß von A zu B, aus den umgekehrten Verhältnissen von $A^I$ zu $B^I$ und $A^{II}$ zu $B^{II}$ zusammengesetzt.

Zu §. 22. Wieviel Kapital muß man zu 4 pro Cent ausleihen, um nach 10 Jahren dieselben Zinßen zu haben, die man von 600 fl. zu 5 pro Cent ausgeliehen in 12 Jahren erhalten hat? — Hier ist Kapital M, Zeit $M^I$, der Zinßfuß $M^{II}$, die Zinßen M; folglich A = B, und A = gesuchtes Kapital, B = 600 fl. Kapital, $A^I$ = 10 Jahre, $B^I$ = 12 Jahre, $A^{II}$ = 4, $B^{II}$ = 5, dahero $A^I = \frac{10}{12} B^I$, $A^{II} = \frac{4}{5} B^{II}$ und $A = \frac{12}{10} \cdot \frac{5}{4} B = \frac{3}{2} B = \frac{3}{2} \cdot 600$ fl. = 900 fl.

§. 24. Eben so folgt aber nun allgemein, daß so oft B = A ist, das Verhältniß zweyer Theile eines der bedingenden Dinge zusammengesetzt ist, aus den umgekehrten Verhältnissen der zugehörigen Theile aller übrigen bedingenden Dinge.

Ferner erhellet zu gleicher Zeit, daß vorstehende von (§. 16. bis §. 24.) aufgestellten Sätze alle möglichen Fälle, die Verhältnißbestimmung von einander abhängiger Dinge betreffend, enthalten. Alle im Leben vorkommende Aufgaben müssen sich daher auf diese bis jetzt aufgestellten zurückbringen lassen.

§. 25. So wie man aber das Verhältniß von A zu B durch m:n bezeichnet, wo die Zahlen

len m und n gefunden werden indem man A und B auf eine und dieselbe Einheit bezieht (durch ein und dasselbe Maas mißt, nach §. 14. II.); eben so kann man auch gedachtes Verhältniß ganz kurz durch A:B bezeichnen, wenn man im Gedächtniß behält daß A und B dann die Zahlen bezeichnen, die man erhält, indem beyde Dinge auf dieselbe Einheit reduzirt werden. Daß die 4 Dinge A, B, 𝔄, 𝔅 in Proporzion stehen (§. 16.), kann man dann ausdrücken durch A:B = 𝔄:𝔅; und dieses ist eine Gleichung zwischen Zahlen, was man nie aus den Augen lassen darf. Nach (Kap. IV. §. 112. III.) hat man dann auch

$$A:\mathfrak{A} = B:\mathfrak{B}$$

und auch dieß ist eine Gleichung zwischen Zahlen, indem hier A, 𝔄, B, 𝔅, bloße Zahlbilder sind; nehmlich die Zahlen bezeichnen, die man erhält, indem man die gleichartigen Dinge A und B, desgleichen 𝔄 und 𝔅, auf einerlei Einheit bringt (mit einerlei Maaße mißt).

Zu §. 25. Hat man also das Bild

(8 Loth) : (3 fl.) = (9 ℔) : (72 Thaler)

so drückt dies nichts anders aus, als daß man die gleichartige Dinge 8 Loth und 9 ℔, desgleichen 3 fl. und 72 Thaler auf einerlei Einheit reduziren soll (z. B. erstere auf Lothe, giebt 8 Loth und 9.32 oder 288 Loth, und letztere auf Thaler giebt 2 Thaler und 72 Thaler), und daß dann die Zahlen die man erhalten hat, in derselben Ordnung genommen, zwey gleiche Quozienten bilden, nehmlich

$$8 : 2 = 288 : 72 \text{ oder } \frac{8}{2} = \frac{288}{72}.$$

§. 26.

§. 26. Dann hat man aber auch: nach (Kapit. IV. §. 112. II.)

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}.B}{A}$$

d. h. wenn 4 Dinge A, B, 𝔄, 𝔅, eine geometrische Proporzion bilden, so findet man das 4te Glied 𝔅, wenn man die beyden mittlern 𝔄 und B mit einander multiplizirt, und dann durch das erste A dividirt; und der Sinn dieser Worte ist folgender: wenn die gleichartigen Dinge A und B durch Zahlen ausgedrückt sind, die sich auf dieselbe Einheit beziehen, eben so statt 𝔄 eine Zahl gesetzt wird, die sich auf eine gewisse Einheit Z (z. B. Gulden) bezieht, so findet man die Zahl für 𝔅, auf dieselbe Einheit Z (Gulden) bezogen, wenn man die für 𝔄 und B erhaltenen Zahlen mit einander multiplizirt, und das Produkt durch die für A sich ergebende Zahl dividirt. Diese Regel nennt man gewöhnlich die Regel de tri (regula de tribus terminis).

Zu §. 26. Sey gegeben die Aufgabe: 2 Loth kosten 7 Kr., wieviel bekommt man für 9 fl.? — Hier sind die gleichartigen A und B, 7 Kr. und 9 fl. welche letztere man mit ersterer auf dieselbe Einheit bringen muß, (also 9 fl. = 9 . 60 Kr. = 540 Kr.) dann hat man A = 7 Kr., B = 540 Kr., 𝔄 = 2 Loth und 𝔅 zu finden aus der Proporzion

7 Kr. : 540 Kr. = 2 Loth : 𝔅. Dahero

$$\mathfrak{B} = \frac{2 \cdot 540}{7}\text{ Loth} = \frac{1080}{7}\text{ Loth} = 154\tfrac{2}{7}\text{ Loth},$$

die man nach (§. 11. II.) auf ℔ reduziren kann, wodurch man 𝔅 = 4 ℔ $26\frac{2}{7}$ Loth erhält.

Anmerk. Da die angewandte Zahlenlehre es immer bloß mit Vergleichungen zweyer Dinge zu thun

thun hat (§. 1.), also nie ein Ding allein in Betrachtung gezogen wird, so pflegt man gewöhnlich mit den Zeichen der Dinge, wie mit Zahlbildern zu operiren, darf aber dabey den wahren in (§. 25. und §. 26.) angegebenen Sinn nicht aus den Augen verlieren; nehmlich daß jedesmal die zwey gleichartigen Dinge die vorkommen, auf einerlei Maas reduzirt seyn müssen, und daß die Zeichen dieser Dinge in den vorzunehmenden Operazionen statt dieser Zahlen stehen.

§. 27. Den Satz (§. 17.) kann man nun auch auf folgende Art darstellen und erweisen. Ist nehmlich

$\mathfrak{A}$ von A und $A^1$
$\mathfrak{C}$ von B und $A^1$
$\mathfrak{B}$ von B und $B^1$ abhängig, so hat man
$A : B = \mathfrak{A} : \mathfrak{C}$ und
$A^1 : B^1 = \mathfrak{C} : \mathfrak{B}$ dahero, nach (K. IV. §. 118.)
$A . A^1 : B . B^1 = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$ und nach (K. IV. §. 112. II.)

$$☾\ \mathfrak{B} = \frac{B . B^1 . \mathfrak{A}}{A . A^1} = (\text{K. II. §. 48.}) \frac{B}{A} \cdot \frac{B^1}{A^1} \cdot \mathfrak{A},$$

dasselbe Resultat wie (§. 17.); denn hier stehen die Buchstaben B und A, nach (§§. 25. und 26.) statt der Zahlen m und n, eben so $B^1$ und $A^1$ statt der Zahlen p und q.

§. 28. Eben so läßt sich aber auch der Satz (§. 19.) auf eine ähnliche Art darstellen und erweisen. Ist nehmlich

𝔄 abhängig von $A, A^{I}, A^{II}$
ℭ — — $B, A^{I}, A^{II}$
𝔇 — — $B, B^{I}, A^{II}$
𝔅 — — $B, B^{I}, B^{II}$, so ist

$A : B = 𝔄 : ℭ$
$A^{I} : B^{I} = ℭ : 𝔇$
$A^{II} : B^{II} = 𝔇 : 𝔅$, folglich nach (K. IV. §. 118.):

$A.A^{I}.A^{II} : B.B^{I}.B^{II} = 𝔄 : 𝔅$ und (K. IV. §. 112. II.)

$$\odot\ 𝔅 = \frac{B.B^{I}.B^{II}\ 𝔄}{A.A^{I}.A^{II}} = \frac{B}{A} \cdot \frac{B^{I}}{A^{I}} \cdot \frac{B^{II}}{A^{II}} \cdot 𝔄.$$

Dasselbe Resultat, wie (§. 19.).

Zu §. 27. und 28. Man sieht sogleich, daß A und B, desgleichen $A^{I}$ und $B^{I}$, so wie auch $A^{II}$ und $B^{II}$ auf dieselbe Einheit bezogen seyn müssen, daß 𝔄 auf eine beliebige Einheit 𝔷 (Rthl., fl., ℔, ꝛc.) bezogen seyn kann, daß aber dann ℭ, folglich auch 𝔇 und also auch 𝔅, auf dieselbe Einheit 𝔷 (Rthl., fl., ℔, ꝛc.) bezogen seyn muß. — Die aus (☾) hervorgehende Regel nennt man gewöhnlich die Regel de Quinque (regula de quinque terminis), so wie die aus der Formel (⊙) hervorgehende, die Regel de septem (regula de septem terminis) genannt wird.

Aber gerade so könnte der in (§. 21.) betrachtete allgemeine Fall behandelt und erwiesen, so wie dann das Ding 𝔅 mittelst einer der Formeln (☾ und ⊙) ähnlichen Formel bestimmt werden. Dieß würde ähnliche Regeln an die Hand geben die man mit den, den vorigen entsprechenden Namen (regula de novem, regula de undecim ꝛc. ꝛc.) belegt. Alle diese Regeln haben aber den gemeinschaftlichen Namen der Kettenregel (regula catenaria.)

§. 29. Allenthalben finden wir in der Natur, sonst gleichartige Dinge in solchen Beziehungen genommen in denen sie sich gegenseitig zu vernichten stre-

streben. Solche Beziehungen heißen entgegengesetzte, und sonst gleichartige Dinge, die man in solchen entgegengesetzten Beziehungen betrachtet, entgegengesetzte Dinge (gewöhnlich entgegengesetzte Größen). — Entgegengesetzte Dinge sind daher nie gleichartig, werden aber gleichartig so bald man auf die entgegengesetzten Beziehungen nicht mehr Rücksicht nimmt.

Sind die gleichartigen Dinge einander gleich, so vernichten sie sich, in den entgegengesetzten Beziehungen betrachtet, gänzlich bey ihrer Vereinigung; sind sie aber einander ungleich, so hebt das kleinere das größere nur zum Theil auf.

Zu §. 29. Dahin gehören: Geld, das man einnimmt oder ausgiebt, besitzt oder schuldig ist, findet oder verlieret ꝛc. ꝛc.; die entgegengesetzten Richtungen des Raumes, Bewegung vorwärts oder rückwärts, Steigen oder Fallen ꝛc. ꝛc.; etwas hinlegen oder wegnehmen ꝛc. ꝛc.

§. 30. Setzt man in (§. 8. n. 3.) das Bild $-m$ statt n so erhält man

$$mC + (-m)C = [m + (-m)]C = (\text{K. I. §. 27. n. 1.})\ (m - m)C = 0C = 0.$$

d. h. das durch $(-m)C$ ausgedrückte Ding vernichtet das andere durch $mC$ ausgedrückte gänzlich, so bald beyde mit einander vereinigt werden (§. 6.); das Bild $(-m)C$ drückt also, wenn man für solches alle Sätze der benannten Zahlen (d. h. der Bilder $mC$, $pD$ ꝛc. ꝛc.) statt finden läßt, das Ding aus, welches dem Ding $mC$ gleich aber entgegengesetzt ist.

Zu §. 30. Sagt man daher, oder findet man durch Rechnung, daß das Quecksilber im Thermometer um (— 3) Linien gefallen sey, so bedeutet dieß, es sey um 3 Linien gestiegen; eben so ist es um 3 Linien gefallen, wenn man findet, daß es um (— 3) Linien gestiegen sey. Ferner sind (—4) fl. Schulden, gleichbedeutend mit 4 fl. Vermögen und das Bild (—4) fl. Vermögen drückt 4 fl. Schulden aus; um (—7) Meilen vorwärts gekommen, bedeutet soviel als 7 Meilen rückwärts gemacht, und umgekehrt. Auch bedeutet (— 2) fl. Verlust, soviel als 2 fl. Gewinnst, und (—5) fl. Gewinnst soviel als 5 fl. Verlust; u. s. w.

## Verbesserungen.

| Seite: | Zeile: | |
|---|---|---|
| 16 | 7 | von oben lies $[(a - c) + b] + c$ |
| 29 | 16 | von oben lies Zeichen der Multiplikazion statt (Zeichen der Multiplikazion) |
| 45 | 11 | von oben l. $\frac{ma}{b}$ |
| 49 | 4 | von unten l. $\frac{16}{8}$ |
| 54 | 9 | von unten l. $8 : 2$ |
| 63 | 4 | von unten l. $ab^m$ |
| 69 | 10 | von oben l. 64 ? 4 = 3 |
| 85 | 6 | von oben l. $\sqrt[m]{a^n}$ |
| — | 4 | von unten l. $4^6$. |
| 88 | 1 | von unten l. $\sqrt[3]{(2^3 . 64)}$ |
| 89 | 4 | von unten l. $6 : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(6^3 : 8)} = 3$ |
| 92 | 5 | von unten l. $16^3 =$ |
| — | 6 | von unten l. $16^3$ ? 2 |
| 96 | 13 | von oben l. $\sqrt[6]{64} = 2$ |
| 128 | 9 | von unten l. und |
| 196 | 11 | von oben l. $a^b$ statt ab |

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Elementar-Zahlenlehre zum Gebrauch für Schulen und Selbstlernende

Erlangen 1816

Math.p. 382 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082500-4